



附录

答案及解析



第1章 数列

第1节 数列的概念及其表示



题型上分练

1. C 【解析】观察五边形数发现,后一个数与前一个数的差依次为 4, 7, 10, $\dots$ (提示:数字间隔 3, 即后一个数与前一个数的差成等差数列). 设五边形数形成的数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 4$, $a_3 = 1 + 4 + 7$, $a_4 = 1 + 4 + 7 + 10$, $\dots$, 由此可知, a_n 是以 1 为首项, 3 为公差的等差数列的前 n 项和, 所以 $a_8 =$

关键点

$$8 \times 1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 3 = 92 \quad \left(\text{提示: 等差数列前 } n \text{ 项和公式为 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d, \text{ 其中 } d \text{ 为公差} \right).$$
 故选 C.

2. C 【解析】阅读题干并观察题图特点可知, 等腰直角三角形的面积从最小的等腰直角三角形开始依次扩大 2 倍. 根据题意, 记图形 1 的面积为 a_1 , 后续图形的面积依次为 $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$,

$$\text{则图形 1 的面积 } a_1 = 1 + 1 \times 2 = 3,$$

$$\text{图形 2 的面积 } a_2 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 = 7,$$

$$\text{图形 3 的面积 } a_3 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 15,$$

$$\text{图形 4 的面积 } a_4 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 31,$$

$$\text{以此类推, 图形 } n \text{ 的面积 } a_n = 2^{n+1} - 1, \text{ 所以第 10 个图形的面积为 } 2^{11} - 1 = 2\,047. \text{ 故选 C.}$$

3. C 【解析】设“大衍数列”的通项为 a_n , 观察此数列, 偶数项为 2, 8, 18, 32, 50, $\dots$, 可得 $a_{2n} = 2n^2$, 奇数项为 0, 4, 12, 24, 40, $\dots$, 可得 $a_{2n-1} = a_{2n} - 2n$,

$$\text{所以 } a_{16} = 2 \times 8^2 = 128, a_{60} = 2 \times 30^2 = 1\,800, \text{ 则 } a_{15} = a_{2 \times 8 - 1} = a_{16} - 2 \times 8 = 112, \text{ 所以 } a_{15} + a_{60} = 112 + 1\,800 = 1\,912. \text{ 故选 C.}$$

4. A 【解析】由 $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^n$, 得 $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = -(-1)^n$ (提示: 出现 $(-1)^n$ 时往往要分奇偶项讨论),

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = -1; \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = 1,$$

$$\text{所以 } (a_1 a_3 - a_2^2) (a_2 a_4 - a_3^2) (a_3 a_5 - a_4^2) \cdots (a_{2\,025} a_{2\,027} - a_{2\,026}^2) = 1 \times (-1) \times 1 \times (-1) \times \cdots \times (-1) \times 1 = 1. \text{ 故选 A.}$$

5. B 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n - 1$, 所以 $a_5 = S_5 - S_4 = 3^5 - 3^4 = 162$. 故选 B.



6. $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$ 【解析】当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n + 1) - [(n-1)^2 + (n-1) + 1] = 2n$; 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$, 不满足上

式, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 2n, n \geq 2. \end{cases}$

7. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $a_{n+1} - a_n > 0$, 即 $\frac{1}{2}a_n + 2 - a_n > 0$, 解得 $a_n < 4$, 则 $a_1 = a < 4$. 故选 A.

一题多解

因为 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$, 所以 $a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4)$.

若 $a = 4$, 则 $a_n = 4$, 不符合题意,

所以 $a \neq 4$, 则 $\{a_n - 4\}$ 是首项为 $(a - 4)$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数

列, 所以 $a_n = (a - 4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4$.

当 $a > 4$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 不符合题意;

当 $a < 4$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 符合题意.

综上, $a \in (-\infty, 4)$.

8. C 【解析】令 $a_n = \frac{n-3}{2n-17} \geq 0$, 由 $n \in \mathbf{N}^*$, 解得 $n \leq 3$ 或 $n \geq 9$.

当 $n \leq 3$ 时, $a_n \geq 0$, S_n 递增, 且 $S_3 = S_2$;

当 $4 \leq n \leq 8$ 时, $a_n < 0$, S_n 递减;

当 $n \geq 9$ 时, $a_n > 0$, S_n 递增.

又 $a_1 = \frac{2}{15}$, $a_2 = \frac{1}{13}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{9}$, $\dots$, $a_8 = -5$, 所以 $S_8 < S_1$, 故

S_n 取得最小值时 n 的值为 8. 故选 C.

9. B 【解析】由 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$, 可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$, 故 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列,

因此有 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} = 1$, 所以 $a_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$, 故 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 则

$$\frac{2S_n + 12}{a_n} = \frac{n(n+1) + 12}{n} = n + \frac{12}{n} + 1, n \in \mathbf{N}^*.$$

设 $f(x) = x + \frac{12}{x}$, $x > 0$, 令 $x = \frac{12}{x}$, 解得 $x = 2\sqrt{3}$, 由对勾函数的单

调性, 易知 $f(x) = x + \frac{12}{x}$ 在 $(0, 2\sqrt{3})$ 上单调递减, 在 $(2\sqrt{3},$

$+\infty)$ 上单调递增, 故 $f(n) = n + \frac{12}{n}$ 可能在 $n = 3$ 或 $n = 4$ 处取得

最小值(关键: 由函数的单调性确定数列的单调性).

而 $f(3) = 3 + \frac{12}{3} = 7$, $f(4) = 4 + \frac{12}{4} = 7$, 得 $f(n) = n + \frac{12}{n}$ 的最小值

为 7, 则 $n + \frac{12}{n} + 1$ 的最小值为 8. 故选 B.

10. B 【解析】根据指数函数 $y = a^x$, $a \in (0, 1)$ 是减函数, 结合递推公式 $a_{n+1} = a^{a_n}$ 类推.

因为 $a \in (0, 1)$, 所以函数 $y = a^x$ 是减函数, 所以 $a^0 > a^a > a$, 即

$1 > a_2 > a_1 > 0$.



由函数 $y=a^x$ 是减函数, $1>a_2>a_1=a>0$, 得 $a^1<a^2<a^1<a^0$, 即 $0<a_1<a_3<a_2<1$.

由函数 $y=a^x$ 是减函数, $0<a_1<a_3<a_2<1$, 得 $1>a^1>a^3>a^2>a$, 即 $1>a_2>a_4>a_3>a_1$.

由函数 $y=a^x$ 是减函数, $1>a_2>a_4>a_3>a_1>0$, 得 $a<a^2<a^4<a^3<a^1<a^0$, 即 $0<a_1<a_3<a_5<a_4<a_2<1$.

以此类推, 可知数列的最大项为 a_2 . 故选 B.

11. **(-∞, 9)** 【解析】若数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 且 $a_n = -3n^2 + \lambda n$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 则 $a_{n+1} - a_n = [-3(n+1)^2 + \lambda(n+1)] - (-3n^2 + \lambda n) = -6n + \lambda - 3 < 0$, 可得 $\lambda < 6n + 3$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立.

当 $n=1$ 时, $6n+3$ 取到最小值 9, 所以 $\lambda < 9$, 所以实数 λ 的取值范围是 $(-\infty, 9)$.

12. **B** 【解析】由 $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 1$ 得 $a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = 1$, 两式相除得 $\frac{a_{n+3}}{a_n} = 1$ ($a_n \neq 0$), 即 $a_{n+3} = a_n$. 由 $a_1 = 2, a_2 = -\frac{1}{2}$, 得 $a_3 = -1$. 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则有 $T_1 = 2, T_2 = -1, T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = -1, \dots$, 则数列 $\{T_n\}$ 是以 3 为周期的数列, T_n 的最大值为 2. 故选 B.

13. **B** 【解析】由题意可得 $a_3 = a_1 - a_2 = 1$, 因为 $a_3 = a_2$, 所以 $a_4 = a_3 - a_2 = 0$, 因为 $a_4 < a_3$, 所以 $a_5 = a_3 - a_4 = 1$, 因为 $a_5 > a_4$, 所以 $a_6 = a_5 - a_4 = 1$, 因为 $a_6 = a_5$, 所以 $a_7 = a_6 - a_5 = 0, \dots$, 所以数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起是以 1, 1, 0 为周期的数列, 则 $S_{2025} = a_1 + 674(a_2 + a_3 + a_4) + a_{2024} + a_{2025} = 2 + 674 \times 2 + 1 + 1 = 1352$. 故选 B.

14. **A** 【解析】由递推关系得 $a_3 = a_2 + a_1 = 3, a_4 = -a_3 + a_2 = -1, a_5 = a_4 + a_3 = 2, a_6 = -a_5 + a_4 = -3, a_7 = a_6 + a_5 = -1, a_8 = -a_7 + a_6 = -2, a_9 = a_8 + a_7 = -3, a_{10} = -a_9 + a_8 = 1, a_{11} = a_{10} + a_9 = -2, a_{12} = -a_{11} + a_{10} = 3, a_{13} = a_{12} + a_{11} = 1, a_{14} = -a_{13} + a_{12} = 2, \dots$, 所以 $\{a_n\}$ 的周期为 12, 则 $a_{2026} = a_{10} = 1$, 故 A 正确, B 错误; $\{a_n\}$ 在一个周期内的和为 $1+2+3-1+2-3-1-2-3+1-2+3=0$, 则 $S_{2026} = 168 \times 0 + 1 + 2 + 3 - 1 + 2 - 3 - 1 - 2 - 3 + 1 = -1$, 故 C, D 错误.

15. **5** 【解析】因为 $a_2 + a_3 = 4$, 所以当 $n=1$ 时, $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 4 = 9$, 所以 $a_1 = 5$.

由 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 9$ 得 $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 9$, 两式相减可得 $a_{n+3} - a_n = 0$, 即 $a_{n+3} = a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列.

关键点

因为 $2026 = 675 \times 3 + 1$, 所以 $a_{2026} = a_{675 \times 3 + 1} = a_1 = 5$.

16. **$\frac{3}{2}$** 【解析】根据累加法结合余弦函数的周期性可求得

$$\sum_{i=1}^{2026} a_i.$$

由题设得 $a_n - a_{n-1} = \cos \frac{(n-1)\pi}{3}, n \geq 2$, 由累加法可得 $a_n -$

$$a_1 = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{3}, n \geq 2 \text{ (提示: 出现 } a_n -$$



$a_{n-1}=f(n)$ 的形式, 考虑用累加法求 a_n), 即 $a_n = \frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{3} +$

$$\cos \frac{2\pi}{3} + \cdots + \cos \frac{(n-1)\pi}{3}, n \geq 2.$$

$$\text{故 } a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

$$a_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1, a_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$a_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \cdots,$$

而 $\cos \frac{n\pi}{3}$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$, 故 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的周期

$$\text{数列, 且 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^{2026} a_i = 337(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{2}.$$



综合提分练

1. C 必刷考点 ⊙ 已知 S_n 求 a_n

【解析】由 $S_n = n^3 - 2n + \sin \frac{n}{2}\pi$, 可得 $S_6 = 6^3 - 12 + \sin 3\pi = 216 - 12 = 204$, $S_5 = 5^3 - 10 + \sin \frac{5}{2}\pi = 125 - 10 + 1 = 116$, 故 $a_6 = S_6 - S_5 = 204 - 116 = 88$. 故选 C.

2. B 必刷题型 ⊙ 根据数列的单调性求参数的取值范围

【解析】当 $n < 3$ 时, 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $t > 0$;

当 $n \geq 3$ 时, 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $t \in \mathbf{R}$, 又当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 $a_2 < a_3$, 即 $2t - 1 < t - 2^{-3} = t - \frac{1}{8}$, 解得 $t < \frac{7}{8}$.

综上, $0 < t < \frac{7}{8}$. 故选 B.

3. D 必刷考点 ⊙ 根据数列递推公式写出数列的项

【解析】当 $n = 1$ 时, $\frac{2}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2} = 1$, 即 $2 + a_1 = a_1 a_2$ ①.

当 $n = 2$ 时, $\frac{2}{a_1 a_2} + \frac{4}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3} = 1$, 又 $a_3 = 6$, $\frac{2}{a_1 a_2} = 1 - \frac{1}{a_2}$, 所以 $1 - \frac{1}{a_2} + \frac{4}{6a_2} + \frac{1}{6} = 1$, 解得 $a_2 = 2$, 把 $a_2 = 2$ 代入①得 $2 + a_1 = 2a_1$, 解得 $a_1 = 2$.

当 $n = 3$ 时, $\frac{2}{a_1 a_2} + \frac{4}{a_2 a_3} + \frac{8}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_4} = 1$, 又 $\frac{2}{a_1 a_2} + \frac{4}{a_2 a_3} = 1 - \frac{1}{a_3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, 所以 $\frac{5}{6} + \frac{8}{6a_4} + \frac{1}{a_4} = 1$, 解得 $a_4 = 14$. 故 $a_4 = 7a_1$.

4. C 必刷题型 ⊙ 数列的新定义问题

【解析】不妨设第 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个“拐角数”为 a_n ,

不难发现 $a_2 - a_1 = 2 \times 2$, $a_3 - a_2 = 2 \times 3$, $a_4 - a_3 = 2 \times 4$, $\cdots$, $a_n - a_{n-1} = 2n (n \geq 2)$,



所以 $a_n - a_1 = 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = \frac{(n-1)(4+2n)}{2} = (n-1)(n+2)$,

则 $a_n = n^2 + n + 1$.

当 $n=1$ 时, 也符合上式, 所以 $a_n = n^2 + n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以第 7 个“拐角数”是 $a_7 = 7^2 + 7 + 1 = 57$, 第 8 个“拐角数”是 $a_8 = 8^2 + 8 + 1 = 73$, 第 9 个“拐角数”是 $a_9 = 9^2 + 9 + 1 = 91$, 第 10 个“拐角数”是 $a_{10} = 10^2 + 10 + 1 = 111$, 故 **C 正确**. 其余选项都不是“拐角数”. 故选 C.

5. C 必刷题型 ⊙ 根据数列的单调性求参数的取值范围、数列不等式恒成立问题

【解析】不妨设 $m > n$, 则 $a_m - a_n \geq 6(m-n)$, 即 $a_m - 6m \geq a_n - 6n$.

令 $b_n = a_n - 6n$, 则 $b_n = n^2 - \frac{a}{n} - 6n$, 所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*, b_{n+1} \geq b_n$ 恒成立, 即 $b_{n+1} - b_n \geq 0$.

$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - \frac{a}{n+1} - 6(n+1) - \left(n^2 - \frac{a}{n} - 6n\right) \geq 0$, 整理得

$2n-5 \geq \frac{a}{n+1} - \frac{a}{n}$, 即 $a \geq n(n+1)(5-2n)$,

当 $n=1$ 时, $n(n+1)(5-2n) = 1 \times (1+1) \times (5-2 \times 1) = 1 \times 2 \times 3 = 6$,

当 $n=2$ 时, $n(n+1)(5-2n) = 2 \times (2+1) \times (5-2 \times 2) = 2 \times 3 \times 1 = 6$,

当 $n \geq 3$ 时, $5-2n \leq -1, n(n+1) > 0$, 所以 $n(n+1)(5-2n) \leq 0$, 所以 $n(n+1)(5-2n)$ 的最大值为 6, 故 $a \geq 6$. 故选 C.

6. ABD 必刷题型 ⊙ 有关数列的最值问题

【解析】因为 $a_n = \frac{9}{2n-9} (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $a_{n+1} - a_n = \frac{9}{2n-7} - \frac{9}{2n-9} = \frac{-18}{(2n-7)(2n-9)}$.

令 $a_{n+1} - a_n > 0$, 即 $(2n-7)(2n-9) < 0$, 解得 $\frac{7}{2} < n < \frac{9}{2}$.

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n=4$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 则当 $1 \leq n \leq 3$ 或 $n \geq 5$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$.

令 $a_n = \frac{9}{2n-9} > 0$, 解得 $n > \frac{9}{2}$, 所以 $a_1 = -\frac{9}{7} > a_2 > a_3 > a_4 = -9$,

$a_5 = 9 > a_6 > a_7 > \cdots > 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 有最小项 $a_4 = -9$, 且有最大项 $a_5 = 9$, 故 **A 正确**.

令 $a_n = \frac{9}{2n-9} \in \mathbf{Z}$, 因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n=3$ 或 $n=4$ 或 $n=5$ 或 $n=6$ 或 $n=9$, 所以使 $a_n \in \mathbf{Z}$ 的项共有 5 项, 故 **B 正确**.

令 $a_n a_{n+1} a_{n+2} \leq 0$, 因为 $a_n \neq 0$, 所以 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 中有 1 个负数或 3 个负数, 所以 $n=1$ 或 $n=2$ 或 $n=4$, 故满足 $a_n a_{n+1} a_{n+2} \leq 0$ 的 n 的值共有 3 个, 故 **C 错误**.

因为当 $n \leq 4$ 时, $a_n < 0$, 当 $n \geq 5$ 时, $a_n > 0$, 所以当 $n=4$ 时, S_n 取得最小值, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

7. D 必刷考点 ⊙ 数列的递推公式、数列的周期性



【解析】当 $n \geq 3$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 蜜蜂到达第 n 号蜂房, 可以从第 $n-1$ 号蜂房到达第 n 号蜂房, 也可从第 $n-2$ 号蜂房到达第 n 号蜂房, 所以 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 3$), 且 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 所以 $a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89, a_{11} = 144, a_{12} = 233, a_{13} = 377, a_{14} = 610, a_{15} = 987, a_{16} = 1\,597, a_{17} = 2\,584, a_{18} = 4\,181, a_{19} = 6\,765, \dots$, $\{a_n\}$ 中每项除以 7 的余数依次为 $1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots$, 发现余数的周期是 16, 而 $2\,025 = 16 \times 126 + 9$, 因此 $a_{2\,025}$ 除以 7 的余数为 6. 故选 D.

8. C 必刷考点 ①利用导数研究函数的单调性、最值, 数列的增减性, 确定数列中的最大(小)项

【解析】出现 $\ln x$, 考虑构造函数, 利用导数研究函数的单调性、最值. 结合数列的函数特性进一步分 n 为奇数和偶数两种情况, 研究数列的最值.

$$\text{令 } f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0),$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } 0 < x < e, \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } x > e,$$

故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值, 也是最大值, $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$.

对于 $a_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{(-1)^n}{n}$, 当 n 为奇数时, $a_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}$, 故 $n \geq 3$ 且为奇数时 (注意: 数列与函数的区别是 n 为正整数, 因为 $e \in (2, 3)$, 所以 n 从 3 开始取), $\{a_n\}$ 递减, 且 $a_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} > 0$

恒成立, $a_1 = 1, a_3 = \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{3} < 1$.

当 n 为偶数时, $a_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x} (x > 0)$, 则

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2},$$

令 $g'(x) > 0$, 得 $0 < x < e^2$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $x > e^2$,

故 $g(x)$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递增, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减,

由于 $e^2 \in (7, 8)$, 故当 $2 \leq n \leq 6$ 且 n 为偶数时, $\{a_n\}$ 递增, 当

$n \geq 8$ 且 n 为偶数时, $\{a_n\}$ 递减, 其中 $a_6 = \frac{\ln 6 - 1}{6} < 1, a_8 =$

$$\frac{\ln 8 - 1}{8} = \frac{3\ln 2 - 1}{8} < 1, a_6 - a_8 = \frac{\ln 6 - 1}{6} - \frac{3\ln 2 - 1}{8} = \frac{4\ln 3 - 5\ln 2 - 1}{24} =$$

$$\frac{\ln \frac{81}{32} - 1}{24} < 0,$$

故 $a_2 < a_4 < a_6 < a_8, a_8 > a_{10} > a_{12} > \dots$, 易知当 $n \geq 4$ 且 n 为偶数时,

关键点

$a_n > 0$ 恒成立, 又 $a_2 = \frac{\ln 2 - 1}{2} < 0$, 所以 $\{a_n\}$ 的最大项为 $a_1 = 1$,

最小项为 $a_2 = \frac{\ln 2 - 1}{2}$, 所以 $\{a_n\}$ 有最大项, 有最小项. 故选 C.

9. 507 必刷考点 ①等差数列的实际应用



【解析】观察题图每个手指对应的数字,发现中指的数字符合等差数列特征,故选择计算中指的通项公式,再推算到食指.由图中数字可知,中指对应的数分别为 3, 7, 11, 15, 19, …, 按规律可得中指对应的数构成以 3 为首项, 4 为公差的等差数列,其通项公式为 $3+4(n-1)=4n-1$.

因为 $2\ 027=507\times 4-1$, 所以数到 2 027 时, 第 507 次数到中指, 又当第奇数次数到中指时, 上个数对应的是食指, 所以数到 2 026 时, 第 507 次数到食指.

10.4 必刷考点 ①利用 a_n 与 S_n 的关系求通项、基本不等式

【解析】由 $S_n=2a_n-1$, 得 $S_{n-1}=2a_{n-1}-1$ ($n\geq 2$), 两式相减得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$, 即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$, 则 $a_n=2a_{n-1}$, 又 $a_1=S_1=2a_1-1$, 即 $a_1=1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 即 $a_n=2^{n-1}$.

因为 $\sqrt{a_m a_n}=2a_1$, 所以 $a_m a_n=4$, 即 $2^{m-1}\cdot 2^{n-1}=4$, 即 $m+n-2=2$, 所以 $m+n=4$.

因为 $x>0, y>0, x+y=m+n$, 所以 $x+y=4$,

所以 $\frac{9}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}(x+y)\left(\frac{9}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{9y}{x}+\frac{x}{y}+10\right)\geq \frac{1}{4}\left(2\sqrt{\frac{9y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+10\right)=\frac{1}{4}\times(2\times 3+10)=4$, 当且仅当 $\frac{9y}{x}=\frac{x}{y}$, 即 $x=3, y=1$ 时取等号, 所以 $\frac{9}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是 4.

第 2 节 等差数列及其前 n 项和



题型上分练

1. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

依题意得 $\begin{cases} a_1+3d=5, \\ a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=5, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1+3d=5, \\ a_1+2d=1, \end{cases}$

解得 $d=4, a_1=-7$, 所以 $a_2=a_1+d=-3$.

一题多解

由题易知 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=5$, 可得 $a_3=1$,

由 $2a_3=a_2+a_4$ 得 $a_2+5=2$, 则 $a_2=-3$. 故选 D.

2. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则 $\begin{cases} a_1+d+a_1+4d=17, \\ 2(a_1+d)+a_1+5d=24, \end{cases}$ 整理得 $\begin{cases} 2a_1+5d=17, \\ 3a_1+7d=24, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=3. \end{cases}$

所以 $S_{12}=12a_1+\frac{12\times 11}{2}d=210$.

3. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_6=2S_3-12$, 得

$6a_1+15d=2(3a_1+3d)-12$, 解得 $9d=-12$. 由 $S_{10}=0$, 得 $10a_1+45d=0$, 则 $2a_1=-9d=12$, 所以 $a_1=6$. 故选 A.

4. C 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_8-a_5=3d=9$, 解得 $d=3$.

$S_8-S_5=8a_1+28d-5a_1-10d=3a_1+18d=66$, 所以 $a_1=4$. 故 $a_3=a_1+2d=4+6=10$. 故选 C.



5. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前8项和为60, 所以 $8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d = 60$, 即 $2a_1 + 7d = 15$ ①. 因为 $a_1 + a_3 = 8$, 所以 $2a_1 + 2d = 8$, 即 $a_1 + d = 4$ ②. ①-②得 $a_1 + 6d = 11$, 所以 $a_7 = 11$. 故选D.

6. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\text{由题意得} \begin{cases} S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \times 5}{2} = 5(a_1 + 2d) = 40, \\ a_{11} = a_1 + 10d = 32, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3, \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1) = 3n-1, S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} =$$

$$\frac{(3n+1)n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$\text{所以 } 2S_n - na_n = 3n^2 + n - (3n^2 - n) = 2n.$$

7. $a_n = 2n-1$ 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $S_{2n-1} = 4n^2 - 2a_n - 1$, 所以 $S_3 = 4 \times 2^2 - 2a_2 - 1 = 15 - 2a_2$, 又 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2$, 故 $15 - 2a_2 = 3a_2$, 解得 $a_2 = 3$, 所以 $d = a_2 - a_1 = 2$, 又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$.

8. 925 【解析】将 $1, 2, 3, \dots, 49$ 这49个数分成如下25组: $\{1, 49\}, \{2, 48\}, \dots, \{24, 26\}, \{25\}$,

因为所选取的25个数, 任意2个数之和不为49, 也不为50, 故只能从每组中选择1个数, 故25必须选取, 24不能选取, 先考虑 $\{24, 26\}$, 只能选取26, 再考虑 $\{23, 27\}$, 只能选取27, 以此类推.

故选取的25个数依次为 $25, 26, \dots, 49$, 故这25个数的和为

$$25 + 26 + \dots + 49 = \frac{25+49}{2} \times 25 = 925.$$

9. 6.6 3.5 【解析】因为 a_1, a_2, a_3 是公差为 -0.75 的等差数列, 所以 $a_2 = a_1 + (-0.75) = 8.25$, $a_3 = a_2 + (-0.75) = 7.5$.

又 $a_3 - a_4 = 0.3$, 所以 $a_4 = a_3 - 0.3 = 7.2$.

因为对任意 $i (i=1, 2, \dots, 8)$, $\frac{a_i}{b_i} = \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{a_4}{b_4} = \frac{3}{2}$, 所以 $b_4 =$

$$\frac{2}{3}a_4 = \frac{2}{3} \times 7.2 = 4.8.$$

因为 b_4, b_5, b_6 是公差为 -0.4 的等差数列, 所以 $b_5 = b_4 + (-0.4) = 4.4$, $b_6 = b_5 + (-0.4) = 4$.

又 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{3}{2}$, 所以 $a_5 = \frac{3}{2}b_5 = \frac{3}{2} \times 4.4 = 6.6$, 同理 $a_6 = \frac{3}{2}b_6 =$

$$\frac{3}{2} \times 4 = 6,$$

因为 a_6, a_7, a_8 是公差为 -0.75 的等差数列, 所以 $a_7 = a_6 + (-0.75) = 5.25$.

又 $\frac{a_7}{b_7} = \frac{3}{2}$, 所以 $b_7 = \frac{2}{3}a_7 = \frac{2}{3} \times 5.25 = 3.5$.

综上, $a_5 = 6.6, b_7 = 3.5$.

10. C 【解析】由 $S_{n+1} - 2S_n = 2^{n+1}$, 可得 $\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{S_n}{2^n} = 1$, 又 $S_1 = 2$, 所



以 $\frac{S_1}{2^1} = 1$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{2^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

所以 $\frac{S_n}{2^n} = n$, 所以 $S_n = n \cdot 2^n$,

所以 $a_{2^{025}} = S_{2^{025}} - S_{2^{024}} = 2^{025} \times 2^{2^{025}} - 2^{024} \times 2^{2^{024}} = 2^{026} \times 2^{2^{024}}$. 故选 C.

11. C 【解析】设正项等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

若 $a_2 = 3a_1 + 2$, 则 $a_1 + d = 3a_1 + 2$, 解得 $d = 2a_1 + 2 > 0$,

所以 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(2a_1 + 2) = n^2a_1 + n^2 - n$,

所以 $\sqrt{S_n + n} = \sqrt{n^2a_1 + n^2} = n\sqrt{a_1 + 1}$, 所以数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 是公差为 $\sqrt{a_1 + 1}$ 的等差数列,

故“ $a_2 = 3a_1 + 2$ ”是“数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 是等差数列”的充分条件.

若数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 是等差数列, 设 $\sqrt{S_n + n} = kn + b$ (k, b 为常数),

则 $S_n = k^2n^2 + (2kb - 1)n + b^2$, 又因为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d =$

$\frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$,

所以 $\begin{cases} k^2 = \frac{d}{2}, \\ 2kb - 1 = a_1 - \frac{d}{2}, \\ b^2 = 0, \end{cases}$ 解得 $d = 2a_1 + 2$, 所以 $a_2 = a_1 + d = 3a_1 +$

2 , 故“ $a_2 = 3a_1 + 2$ ”是“数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 是等差数列”的必要条件.

综上, “ $a_2 = 3a_1 + 2$ ”是“数列 $\{\sqrt{S_n + n}\}$ 是等差数列”的充要条件, 故选 C.

12. AC 【解析】由题中条件易知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且公差为 3.

对于 A, $a_{2(n+1)+3} - a_{2n+3} = a_{2n+5} - a_{2n+3} = 2 \times 3 = 6$, 因此 $\{a_{2n+3}\}$ 是等差数列, 故 A 正确;

对于 B, $a_{n+1} + a_{2n+1} - (a_n + a_{2n-1}) = a_{n+1} - a_n + a_{2n+1} - a_{2n-1} = 3 + 2 \times 3 = 9$, 故 $\{a_n + a_{2n-1}\}$ 是等差数列, 故 B 错误;

对于 C, $2S_{n+1} - 3(n+1)^2 - (2S_n - 3n^2) = 2(S_{n+1} - S_n) + 3[n^2 - (n+1)^2] = 2a_{n+1} - 3(2n+1) = 2[3(n+1) - 5] - 6n - 3 = -7$, 故 $\{2S_n - 3n^2\}$ 是等差数列, 故 C 正确;

对于 D, 易知 $a_1 = -2$, $S_n = \frac{(-2+3n-5)n}{2} = \frac{n(3n-7)}{2}$, 故 $\frac{S_n}{n} +$

$3n = \frac{3n-7}{2} + 3n = \frac{9n-7}{2}$, 所以 $\left\{ \frac{S_n}{n} + 3n \right\}$ 是等差数列, 故 D 错误. 故选 AC.

13. C 【解析】因为数列 $\{S_n\}$ 是一个首项不等于公差的等差数



列,所以可设 $S_n = S_1 + (n-1)d$ 且 $S_1 \neq d$,

所以 $a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1 = d, a_3 = S_3 - S_2 = d$, 又 $S_1 \neq d$, 所以 a_1, a_2, a_3 不成等差数列, 故 $\{a_n\}$ 不是等差数列;

因为 $T_n = nS_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 所以 $\frac{T_n}{n} = S_1 + \frac{n-1}{2}d$, 所以 $\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_n}{n} = \left(S_1 + \frac{n+1-1}{2}d\right) - \left(S_1 + \frac{n-1}{2}d\right) = \frac{d}{2}$, 所以 $\left\{\frac{T_n}{n}\right\}$ 是以 S_1 为首项, $\frac{d}{2}$ 为公差的等差数列. 故选 C.

14. (1) 【解】依题意, $a_1 = 1, na_{n+1} - (n+1)a_n = 3n(n+1)$, 所以 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + 3(n+1)$, 所以 $a_2 = \frac{2}{1}a_1 + 3 \times 2 = 8, a_3 = \frac{3}{2}a_2 + 3 \times 3 = 21$.

(2) 【证明】依题意, $a_1 = 1, na_{n+1} - (n+1)a_n = 3n(n+1)$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 3$, 所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 3 的等差数列, 所以 $\frac{a_n}{n} = 3n - 2$, 所以 $a_n = n(3n - 2) = 3n^2 - 2n$.

15. (1) 【证明】因为 $1 + a_n a_{n+1} = 2a_n$, 显然 $a_n \neq 0$,

$$\text{所以 } a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{2a_n - 1}{a_n} - 1} = \frac{a_n}{2a_n - 1 - a_n} = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n - 1} + 1,$$

即 $\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} = 1$, 又 $\frac{1}{a_1 - 1} = 2$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是以 2 为首项, 1 为公差的等差数列.

(2) 【解】由 (1) 得 $\frac{1}{a_n - 1} = n + 1$, 所以 $a_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{n+2}$,

$$\text{所以 } a_n + \frac{1}{a_n} = 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n + T_n &= \left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \\ &= 2n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 2n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \quad (\text{提示: 分组求和法}). \end{aligned}$$

因为 $0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}$, 所以 $2n + \frac{1}{6} \leq 2n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < 2n + \frac{1}{2}$, 所以 $[S_n + T_n] = 2n$.

16. 【解】(1) $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n+1} = n^2$ ①, 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2n-1} = (n-1)^2$ ②,

① - ② 得 $\frac{a_n}{2n+1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$, 故 $a_n = 4n^2 - 1 (n \geq 2)$.

令 $n=1$, 得 $\frac{a_1}{3} = 1^2$, 解得 $a_1 = 3$, 当 $n=1$ 时, $4 \times 1^2 - 1 = 3$.



综上, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 4n^2 - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

$$(2) \text{ 由 } b_n = \frac{16}{a_n + 4n + 1} = \frac{16}{4n^2 - 1 + 4n + 1} = \frac{16}{4n^2 + 4n} = \frac{4}{n^2 + n} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \text{ 得 } T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 4 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 4 - \frac{4}{n+1},$$

$$\text{则 } mT_n + \frac{n^2 + 1}{n+1} = 4m - \frac{4m}{n+1} + \frac{n^2 + 1}{n+1} = \frac{4mn + 4m - 4m + n^2 + 1}{n+1} = \frac{4mn + n^2 + 1}{n+1} = \frac{(n^2 + 2n + 1) + 4mn - 2n}{n+1} = n + 1 + \frac{(4m - 2)n}{n+1}.$$

假设存在实数 m , 使得数列 $\left\{ mT_n + \frac{n^2 + 1}{n+1} \right\}$ 为等差数列,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } n + 1 + \frac{(4m - 2)n}{n+1} - n - \frac{(4m - 2)(n-1)}{n} = 1 + \frac{(4m - 2)n}{n+1} - \frac{(4m - 2)(n-1)}{n} = 1 + (4m - 2) \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) = 1 + \frac{4m - 2}{n(n+1)},$$

$$\text{只有当 } 4m - 2 = 0, \text{ 即 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } n + 1 + \frac{(4m - 2)n}{n+1} - n - \frac{(4m - 2)(n-1)}{n} = 1 \text{ 为常数, 其他 } m \text{ 值均不符合要求.}$$

故当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $\left\{ mT_n + \frac{n^2 + 1}{n+1} \right\}$ 是等差数列.

17. B 【解析】由 $a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} = 4a_7 = 12$, 解得 $a_7 = 3$. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $2a_8 - a_9 = a_7 = 3$. 故选 B.

18. C 【解析】由等差数列前 n 项和公式可得 $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9$, 即 $a_1 + a_9 = 2$, 所以 $a_3 + a_7 = a_1 + a_9 = 2$, 又 $a_3, a_7 > 0$, 所以 $\frac{1}{a_3} + \frac{4}{a_7} = \frac{1}{a_7} \left(\frac{1}{a_3} + \frac{4}{a_7} \right) (a_3 + a_7) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{a_7}{a_3} + \frac{4a_3}{a_7} \right) \geq \frac{1}{2} \times \left(5 + 2\sqrt{\frac{a_7}{a_3} \cdot \frac{4a_3}{a_7}} \right) = \frac{9}{2}$ (提示: “1”的代换), 当且仅当 $\frac{a_7}{a_3} = \frac{4a_3}{a_7}$, 即 $a_3 = \frac{2}{3}, a_7 = \frac{4}{3}$ 时等号成立, 故 $\frac{1}{a_3} + \frac{4}{a_7}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$. 故选 C.

19. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{3n}$ 等价于 $a_3 + a_{3+3 \times 1} + a_{3+3 \times 2} + \cdots + a_{3+3(n-1)}$, 则 $\{a_{3n}\}$ 是公差为 $3d$ 的等差数列, 又 $\{a_{3n}\}$ 的前 n 项和 $S_n = na_3 + \frac{n(n-1)}{2} \times 3d = \frac{3}{4}n \cdot (n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以可得 $3d = \frac{3}{2}$, 解得 $d = \frac{1}{2}$.

一题多解

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{3n} = \frac{3}{4}n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 可知当 $n = 1$ 时, $a_3 = \frac{3}{2}$, 当 $n = 2$ 时, $a_3 + a_6 = \frac{3}{4} \times 2 \times 3 = \frac{9}{2}$, 可得 $a_6 = 3$, 所以 $3d = a_6 - a_3 = \frac{3}{2}$, 解得 $d = \frac{1}{2}$. 故选 D.



20. B 【解析】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} =$

$$\frac{n(a_1 + a_{2n-1})}{2} = na_n, a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1} = na_{n+2},$$

$$\text{则 } \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1}} = \frac{na_n}{na_{n+2}} = \frac{n}{n+2}, \text{ 即 } \frac{a_{n+2}}{n+2} = \frac{a_n}{n},$$

$$\text{因此 } \frac{a_{2(n+1)}}{2(n+1)} = \frac{a_{2n}}{2n},$$

所以数列 $\left\{\frac{a_{2n}}{2n}\right\}$ 是常数列, 则 $\frac{a_{2n}}{2n} = \frac{a_2}{2}$, 即 $\frac{a_{2n}}{a_2} = \frac{2n}{2} = n$, 所以

$$\frac{a_{4050}}{a_2} = 2025. \text{ 故选 B.}$$

21. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 成等差数列, 又 $S_3 = S_9 = 6$, 所以 $6, S_6 - 6, 6 - S_6, S_{12} - 6$ 成等差数列, 则 $6 + S_{12} - 6 = S_6 - 6 + 6 - S_6$, 故 $S_{12} = 0$. 故选 A.

22. B 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d' , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d'$, 所

$$\text{以 } \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)d'}{2}, \text{ 所以 } \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nd'}{2} - \frac{(n-1)d'}{2} = \frac{d'}{2}, \text{ 所}$$

以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列.

设数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d , 易知数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的首项为 $\frac{S_1}{1} = a_1$,

因为 $S_6 = 2S_3 + 18$, 所以 $\frac{S_6}{6} = \frac{S_3}{3} + 3$, 所以 $3d = 3$, 解得 $d = 1$, 又

$$S_{10} = 0, \text{ 即 } \frac{S_{10}}{10} = a_1 + 9d = 0, \text{ 所以 } a_1 = -9. \text{ 故选 B.}$$

23. C 【解析】设 $S_3 = k (k \neq 0)$, 则 $S_6 = 4k$, 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 成等差数列, 即 $k, 4k - k, S_9 - 4k, S_{12} - S_9$ 成等差数列, 易知此数列公差为

$$2k, \text{ 故 } \begin{cases} S_9 - 4k = 5k, \\ S_{12} - S_9 = 7k, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} S_9 = 9k, \\ S_{12} = 16k, \end{cases} \therefore \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{4k}{16k} = \frac{1}{4}, \text{ 故选 C.}$$

24. C 【解析】已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和分

关键点

$$\text{别为 } S_n, T_n, \text{ 则 } \frac{S_7}{T_7} = \frac{a_4}{b_4}. \text{ 对于 } (n+1)a_n = (2n+1)b_{n+1},$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } (2+1)a_2 = (2 \times 2 + 1)b_{2+1}, \text{ 即 } 3a_2 = 5b_3,$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } (3+1)a_3 = (2 \times 3 + 1)b_{3+1}, \text{ 即 } 4a_3 = 7b_4,$$

$$\text{当 } n=4 \text{ 时, } (4+1)a_4 = (2 \times 4 + 1)b_{4+1}, \text{ 即 } 5a_4 = 9b_5.$$

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d_1 , 等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d_2 ,

$$\text{则 } 3(a_4 - 2d_1) = 5(b_4 - d_2) \text{ ①}, 4(a_4 - d_1) = 7b_4 \text{ ②}, 5a_4 = 9(b_4 + d_2) \text{ ③},$$

$$\text{由 ② 得 } d_1 = \frac{4a_4 - 7b_4}{4}, \text{ 由 ③ 得 } d_2 = \frac{5a_4 - 9b_4}{9}, \text{ 代入 ① 整理得}$$

$$4a_4 = 9b_4, \text{ 所以 } \frac{a_4}{b_4} = \frac{9}{4}, \text{ 故 } \frac{S_7}{T_7} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{9}{4}. \text{ 故选 C.}$$

25. 10 【解析】依题意, 根据结论有 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_{\text{中}} = 60 - 54 = 6$, 又

$$S_{\text{奇}} = \frac{2n-1+1}{2} \cdot a_{\text{中}}, \text{ 解得 } n = 10 \text{ (提示: 利用本节要点集结)}$$



4(6) 中的结论).

一题多解 由题可知奇数项有 n 项, 偶数项有 $n-1$ 项, 所

以奇数项和为 $\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2} = na_n$, 偶数项和为

$$\frac{(n-1)(a_2+a_{2n-2})}{2} = (n-1)a_n, \text{ 故 } \frac{n}{n-1} = \frac{60}{54}, \text{ 解得 } n=10.$$

26. C 【解析】因为 $S_{11} = \frac{11(a_1+a_{11})}{2} = 11a_6 < 0$, 所以 $a_6 < 0$,

因为 $a_6+a_7=a_3+a_{10}>0$, 所以 $a_7>0$,

所以公差 $d=a_7-a_6>0$,

故当 $n \leq 6$ 时, $a_n < 0$, 当 $n \geq 7$ 时, $a_n > 0$, 所以当 $n=6$ 时, S_n 取得最小值, 即数列 $\{S_n\}$ 中最小的项是 S_6 , 故选 C.

27. BC 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

对于 A, 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{11} = 2$, $S_5 = -30$, 所以

$$\begin{cases} a_1+10d=2, \\ 5a_1+10d=-30, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1=-8, \\ d=1, \end{cases} \text{ 则 } a_7=a_1+6d=-2<0, \text{ 故 A}$$

错误;

对于 B, 由 A 选项分析可知 $\{a_n\}$ 为递增数列, 故 **B 正确**;

$$\text{对于 C, } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{1}{2}(n^2-17n),$$

由 $S_n > 0$, 即 $\frac{1}{2}(n^2-17n) > 0$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 解得 $n > 17$, 所以使

$S_n > 0$ 的 n 的最小值为 18, 故 **C 正确**;

对于 D, $S_n = \frac{1}{2}(n^2-17n)$ 图象的对称轴为直线 $n = \frac{17}{2}$, 开口

向上, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时, S_n 取得最小值, 为 -36 , 故 **D 错误**. 故选 BC.

28. ABD 【解析】若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n, \text{ 又 } S_n = kn^2 + n - k +$$

2, 所以 $-k+2=0$, 解得 $k=2$, 故 **A 正确**.

易得 $S_{n-1} = k(n-1)^2 + (n-1) - k + 2 (n \geq 2)$, 则 $a_n = S_n - S_{n-1} =$

$2kn - k + 1 (n \geq 2)$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = k + 1 - k + 2 = 3$,

不符合上式.

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 2kn-k+1, n \geq 2. \end{cases} \text{ 因为 } \{a_n\} \text{ 不是递增数列, 所以}$$

$$k \leq 0 \text{ 或 } \begin{cases} k > 0, \\ 3 \geq 2k \cdot 2 - k + 1, \end{cases} \text{ 则 } k \leq \frac{2}{3}, \text{ 故 B 正确.}$$

若 $S_n < S_{n+2}$, 则 $kn^2 + n - k + 2 < k(n+2)^2 + (n+2) - k + 2$, 整理得

$$k > \frac{-1}{2(n+1)}, \text{ 又当 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } \frac{-1}{2(n+1)} < 0 \text{ 恒成立, 所以 } k \geq 0,$$

故 **C 错误**.

因为 $\frac{S_n}{n}$ 的最小值为 3, 所以 $\frac{S_n}{n} = kn + 1 + \frac{-k+2}{n} \geq 3$ 恒成立, 即



$k(n^2-1) \geq 2n-2$, 当 $n=1$ 时, 该不等式成立; 当 $n \geq 2$ 时, $k \geq \frac{2}{n+1}$, 则 $k \geq \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. 当 $n=1$ 时, $\frac{S_1}{1} = 3$ 也满足条件. 故 **D** 正确. 故选 ABD.

29. 50 【解析】由 $a_{n+1} = a_n + 2$, 得 $a_{n+1} - a_n = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 -10 为首项, 2 为公差的等差数列, 则 $a_n = -10 + (n-1) \times 2 = 2n-12$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n(-10+2n-12)}{2} = (n-11)n$.

当 $n \leq 6$ 时, $a_n \leq 0$, 当 $n \geq 7$ 时, $a_n > 0$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 10 项和为 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_9| + |a_{10}| = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_6) + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = S_{10} - 2S_6 = (10-11) \times 10 - 2 \times (6-11) \times 6 = 50$.

30. 【解】 (1) $\therefore \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2a_{n+1}}$,

$$\therefore \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} = 1 - \frac{1}{2a_{n+2}},$$

两式相减得 $\frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right)$, 化简得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2$,

题眼

即数列 $\{a_n\}$ 是从第 2 项起公差为 2 的等差数列.

若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则满足 $a_2 - a_1 = 2$.

令 $n=1$, 有 $\frac{1}{a_1 a_2} = 1 - \frac{1}{2a_2}$, 即 $a_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} = a_1 + 2$,

解得 $a_1 = -2$ 或 $a_1 = \frac{1}{2}$, 由 $a_2 = a_1 + 2 \neq 0$, 可知 $a_1 = \frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 可知, $a_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}$, 又 $a_1 = -\frac{2}{7}$, $\therefore a_2 = -3$, 又数列

$\{a_n\}$ 是从第 2 项起公差为 2 的等差数列,

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_2 + 2(n-2) = 2n-7$,

此时, $S_n = a_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = a_1 + \frac{(n-1)(a_2 + a_n)}{2} = -\frac{2}{7} +$

$\frac{(n-1)(-3+2n-7)}{2}$ (易错: 注意 $\{a_n\}$ 从第 2 项起为等差数

列), 整理得 $S_n = n^2 - 6n + \frac{33}{7} (n \geq 2)$,

又 $S_1 = a_1 = -\frac{2}{7}$ 也满足上式, $\therefore S_n = n^2 - 6n + \frac{33}{7} (n \in \mathbf{N}^*)$.

31. 【解】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_3 + a_6 + a_9 = 3a_6 = 33$, 所以 $a_6 = 11$.

又因为 $a_5 = 9$, 所以 $a_6 - a_5 = d = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_5 + 2(n-5) = 2n-1$.

(2) 由 (1) 知, $b_n = 19 - a_n = 20 - 2n$.

当 $n \leq 10$ 时, $|b_n| = b_n = 20 - 2n$, $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{n(38 - 2n)}{2} =$

$19n - n^2$;

当 $n \geq 11$ 时, $|b_n| = -b_n = 2n - 20$, $S_n = S_{10} + (n-10)(2 \times 11 - 20) + \frac{(n-10)(n-11)}{2} \times 2 = 19 \times 10 - 10^2 + 2(n-10) + n^2 - 21n +$



$$110 = n^2 - 19n + 180.$$

$$\text{综上, } S_n = \begin{cases} 19n - n^2, & n \leq 10, \\ n^2 - 19n + 180, & n \geq 11. \end{cases}$$

32. (1) 【解】因为 $\frac{S_n}{n} = a_n + (1-n)t, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\frac{S_2}{2} = a_2 - t$,

又 $S_2 = a_1 + a_2$, 所以 $a_2 - a_1 = 2t$.

又 $a_2 = a_1 + 2$, 所以 $t = 1$.

(2) 【证明】由(1)可得 $\frac{S_n}{n} = a_n + 1 - n, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $S_n = na_n + n - n^2, n \in \mathbf{N}^*$,

则 $S_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + n + 1 - (n+1)^2$,

两式相减得 $a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - na_n - 2n$,

则 $a_{n+1} - a_n = 2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(3) 【解】由(2)得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + (a_1 - 1)n$,

又 $n^2 < S_n < (n+1)^2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $1 < a_1 < 3 + \frac{1}{n}$.

因为 $1 < a_1 < 3 + \frac{1}{n}$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 时恒成立, 所以 $1 < a_1 \leq 3$.



综合提分练

1. D 必刷知识 ⊙ 等差数列中基本量的计算

【解析】因为 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 9$, 所以 $a_2 = 3$, 又 $a_1 = 1$, 所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$, 则 $a_n = 2n - 1$, 所以 $S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1} = 4n + 4 = 24$, 解得 $n = 5$. 故选 D.

2. C 必刷考点 ⊙ 等差数列的性质、等差数列前 n 项和的计算

【解析】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = 2, a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 2026, n > 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $3a_2 = 2, 3a_{n-1} = 2026$, 因此 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \frac{2+2026}{3} = 676$. 由该数列的前 n 项和为 5070, 得 $\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 5070$, 即 $338n = 5070$, 所以 $n = 15$. 故选 C.

3. C 必刷题型 ⊙ 等差数列的判定、数列的新定义问题

【解析】对于 A, B, 因为数列 $\{a_n\}$ 是“平方递推数列”, 所以 $a_{n+1} = a_n^2$. 又 $a_1 > 0$, 所以 $a_n > 0$, 则 $\lg a_{n+1} - \lg a_n = \lg \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lg a_n$, $(\lg a_{n+2} - \lg a_{n+1}) - (\lg a_{n+1} - \lg a_n) = \lg a_n$, 所以 $\{\lg a_n\}$, $\{\lg a_{n+1} - \lg a_n\}$ 不是等差数列, 所以 A, B 不正确.

对于 C, 因为 $a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}^2a_n^2 = (a_{n+1}a_n)^2$, 所以 $\{a_na_{n+1}\}$ 是“平方递推数列”, 所以 C 正确.

对于 D, 因为 $a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+1}^2 + a_n^2 \neq (a_{n+1} + a_n)^2$, 所以 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 不是“平方递推数列”, 所以 D 不正确. 故选 C.

4. B 必刷考点 ⊙ 等差数列的判定、等差数列的通项公式、数列的前 n 项积



【解析】由题意知 $a_n > 0$, 当 $n=1$ 时, $(a_1-1)a_1=2a_1$, 解得 $a_1=3$.

当 $n \geq 2$ 时, 由 $(a_n-1)T_n=2a_n$ ①, 可得 $(a_{n-1}-1)T_{n-1}=2a_{n-1}$ ②,

①得 $\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} \cdot a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, 即 $a_n-1 = \frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}$, 则 $\frac{1}{a_n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}$, 即

$$\frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n-1}-1} = 1,$$

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列, 故 $\frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{a_1-1} +$

$$(n-1) \cdot 1 = \frac{2n-1}{2}, \text{ 所以 } a_n = \frac{2}{2n-1} + 1.$$

令 $\frac{2}{2n-1} + 1 < \frac{2\,025}{2\,024}$, 解得 $n > \frac{4\,049}{2}$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 n 的最小值

为 2 025. 故选 B.

5. A 必刷考点 ①由递推关系证明数列是等差数列、等差数列的性质

【解析】由 $2n(n+2)S_{n+1} = (n+1)(n+2)S_n + n(n+1)S_{n+2}$ 得

$$\frac{2n(n+2)S_{n+1}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)S_n}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+1)S_{n+2}}{n(n+1)(n+2)}, \text{ 即 } \frac{2S_{n+1}}{n+1} =$$

$$\frac{S_n}{n} + \frac{S_{n+2}}{n+2} \text{ (提示: 等差中项的性质)}, \text{ 故 } \left\{\frac{S_n}{n}\right\} \text{ 为等差数列,}$$

设其公差为 d , 则 $\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d = a_1 + (n-1)d$, 故 $S_n = na_1 +$

$$n(n-1)d \text{ ①, 则 } S_{n+1} = (n+1)a_1 + n(n+1)d \text{ ②,}$$

②-①得 $a_{n+1} = a_1 + 2nd$, 则 $a_n = a_1 + (2n-2)d$, $a_{n+1} - a_n = 2d$, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列.

$$\text{又 } S_5 = \frac{5(a_1+a_5)}{2} = \frac{5 \times 2a_3}{2} = 5a_3 = 25, \frac{S_{2\,025}}{2\,025} = \frac{S_5}{5} + 2\,020d, \text{ 所以}$$

$$5 + 2\,020d = 1, \text{ 解得 } d = -\frac{1}{505},$$

$$\text{所以 } \frac{S_n}{n} = \frac{S_5}{5} - \frac{1}{505}(n-5) = \frac{506}{101} - \frac{1}{505}n, \text{ 则 } \frac{S_{1\,015}}{1\,015} = \frac{506}{101} - \frac{1}{505} \times$$

$$1\,015 = 3, \text{ 又 } S_{1\,015} = \frac{1\,015(a_1+a_{1\,015})}{2} = 1\,015a_{508}, \text{ 故 } a_{508} = \frac{S_{1\,015}}{1\,015} =$$

3. 故选 A.

6. BCD 必刷题型 ①求等差数列前 n 项和的最值、根据等差数列前 n 项和的最值求参数

【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

对于 A, 因为 $n=6$ 时, S_n 最小, 所以 $\begin{cases} a_6 \leq 0, \\ a_7 \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 18+r \leq 0, \\ 21+r \geq 0, \end{cases}$ 所

以 $-21 \leq r \leq -18$, 故 A 错误;

对于 B, 由 $S_4 = 4a_1 + 6d \geq 2$, 得 $2a_1 + 3d \geq 1$, 由 $S_5 = 5a_1 + 10d \leq 15$, 得 $a_1 + 2d \leq 3$, 所以 $S_7 = 7a_1 + 21d = -7(2a_1 + 3d) + 21(a_1 + 2d) \leq -7 + 63 = 56$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $a_1^2 + a_4^2 = 10$, 所以 $(a_3 - 2d)^2 + (a_3 + d)^2 = 10$, 即



$5d^2 - 2a_3d + 2a_3^2 - 10 = 0$, 把该式看作关于 d 的一元二次方程,

则 $\Delta = 4a_3^2 - 20(2a_3^2 - 10) \geq 0$, 解得 $-\frac{5\sqrt{2}}{3} \leq a_3 \leq \frac{5\sqrt{2}}{3}$, 所以 $S_5 =$

$5a_3 \leq \frac{25\sqrt{2}}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 由题意可知 $t = -1$, 故 $S_n = n^2 - 7sn$, 因为 S_7 最小, 所以

$\frac{13}{2} \leq \frac{7s}{2} \leq \frac{15}{2}$, 即 $\frac{13}{7} \leq s \leq \frac{15}{7}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

7. ABD 必刷考点 ① 等差数列的判定、组合数的计算

【解析】对于 A, B, 因为 $(a_{n+1} - a_n)^2 = 3(a_{n+1} - a_n) - 2$, $a_1 = 1$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 1$ 或 $a_{n+1} - a_n = 2$ (提示: 数列 $\{a_n\}$ 后一项与前一項的差可以是 1 或 2, 不一定相等), 故 A, B 正确.

对于 C, 相邻两项的差值最小为 1, 最大为 2, 所以当 $\{a_n\}$ 以 1 为首项, 1 为公差时, S_{11} 取最小值 66; 当 $\{a_n\}$ 以 1 为首项, 2 为公差时, S_{11} 取最大值 121, 且 S_{11} 的取值一定是 $[66, 121]$ 内的所有正整数, 所以 S_{11} 的取值个数为 $121 - 66 + 1 = 56$, 故 C 错误.

对于 D, 因为 $2a_6 = a_1 + a_{11}$, 所以 $a_6 - a_1 = a_{11} - a_6$, 所以 $(a_6 - a_5) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_2 - a_1) = (a_{11} - a_{10}) + (a_{10} - a_9) + \cdots + (a_7 - a_6)$, 所以满足 $2a_6 = a_1 + a_{11}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 $C_5^0 C_5^0 + C_5^1 C_5^1 + C_5^2 C_5^2 + C_5^3 C_5^3 + C_5^4 C_5^4 + C_5^5 C_5^5 = 252$, 故 D 正确. 故选 ABD.

8. A 必刷考点 ② 等差数列的通项公式、前 n 项和公式、数列的奇偶项问题

【解析】因为 $a_n + a_{n+1} = 2n + 1$, 所以 $S_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) = 3 + 7 + \cdots + (4n - 1) = \frac{(3 + 4n - 1)n}{2} = n(2n + 1)$ (提示: 将前后两项看成一项, 再用等差数列求和公式求解).

假设 $S_{2n} = n(2n + 1) = 210$, 解得 $n = 10$ 或 $n = -\frac{21}{2}$ (舍去), 此时 $S_{20} = 210$, 又存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $S_k = S_{k+1} = 210$, 所以有 $k = 19$ 或 $k = 20$.

由 $a_n + a_{n+1} = 2n + 1$ 可得 $a_{n+1} + a_{n+2} = 2n + 3$, 两式相减得 $a_{n+2} - a_n = 2$, 即数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别是等差数列, 且公

关键点

差均为 2.

当 $k = 20$ 时, 有 $S_{20} = S_{21} = 210$, 即 $a_{21} = 0$, 所以 $a_{21} = a_1 + (11 - 1) \times 2 = 0$ (易错: 注意这里是奇数项成等差数列, 故共有 11 项, 而不是 21 项), 解得 $a_1 = -20$;

当 $k = 19$ 时, 有 $S_{19} = S_{20} = 210$, 即 $a_{20} = 0$, $a_{20} = a_2 + (10 - 1) \times 2 = 0$ (易错: 同理此处为偶数项, 共有 10 项), 解得 $a_2 = -18$, 由已知得 $a_1 + a_2 = 3$, 所以 $a_1 = 21$. 故选 A.

9. $\frac{1}{5}$ 必刷题型 ③ 等差数列中基本量的计算

【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则有 $\frac{a_1 + a_1 + d}{a_1 + 2d} = 3$, 整理得 $a_1 =$



$$-5d, \text{ 所以 } \frac{a_4+a_5}{S_6} = \frac{a_1+3d+a_1+4d}{6a_1+15d} = \frac{2a_1+7d}{6a_1+15d} = \frac{-10d+7d}{-30d+15d} = \frac{-3d}{-15d} = \frac{1}{5}.$$

10. $\left(-5, -\frac{10}{3}\right)$ **必刷题型** ⊙ 根据等差数列前 n 项和的最值求参数的取值范围

【解析】 因为 S_6 是 $\{S_n\}$ 中的唯一最大项, 所以 $a_6 > 0$ 且 $a_7 < 0$, 即 $a_4 + 2d > 0$ 且 $a_4 + 3d < 0$, 又 $a_4 = 10$, 所以 $-5 < d < -\frac{10}{3}$, 即 d 的取值范围为 $\left(-5, -\frac{10}{3}\right)$.

11. **必刷题型** ⊙ 求数列通项公式、数列不等式有解问题

【解】 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 1$), $\therefore 2a_1 = a_2, \therefore 2a_1 = a_1 + d$, 解得 $a_1 = d, a_2 = 2d, \therefore S_2 = a_1 + a_2 = 3d$.

$$\text{由 } \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ 可知 } \frac{1}{a_1 b_1} = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{2}{a_1} = \frac{2}{d}, \frac{1}{a_2 b_2} = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{6}{a_2} = \frac{6}{2d} = \frac{3}{d},$$

$$\text{又 } T_2 = b_1 + b_2 = \frac{2}{d} + \frac{3}{d} = \frac{5}{d}, \therefore S_2 + T_2 = 3d + \frac{5}{d} = 16,$$

$$\text{即 } 3d^2 - 16d + 5 = 0, \text{ 解得 } d = 5 \text{ 或 } d = \frac{1}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5n, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = 5n, \text{ 由 } \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ 可知 } \frac{1}{5n b_n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\text{解得 } b_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5}, \therefore \{b_n\} \text{ 为等差数列},$$

$$\text{故 } T_n = \frac{n\left(\frac{2}{5} + \frac{n+1}{5}\right)}{2} = \frac{n(n+3)}{10} = \frac{n^2 + 3n}{10}.$$

存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $10T_n - 9n + t + t^2 < 3$, 即 $(10T_n - 9n)_{\min} + t + t^2 < 3$,

$\therefore 10T_n - 9n = n^2 - 6n = (n-3)^2 - 9, \therefore (10T_n - 9n)_{\min} = -9$, 故 $-9 + t + t^2 < 3$, 整理得 $t^2 + t - 12 < 0$, 解得 $-4 < t < 3$, $\therefore$ 实数 t 的取值范围是 $(-4, 3)$.

12. **必刷题型** ⊙ 求数列通项公式、数列不等式恒成立问题

【解】 (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1, S_n = \frac{a_n a_{n+1} + 1}{4}$, 即 $4S_n = a_n a_{n+1} + 1$,

所以当 $n \geq 2$ 时, 可得 $4S_{n-1} = a_{n-1} a_n + 1$, 两式相减得 $4a_n = a_n(a_{n+1} - a_{n-1})$.

因为 $a_n \neq 0$, 所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 4$, 所以 $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$ 及 $a_2,$

突破点

$a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ 均为公差为 4 的等差数列.

当 $n = 1$ 时, 由 $a_1 = 1$ 及 $S_1 = \frac{a_1 a_2 + 1}{4}$, 解得 $a_2 = 3$,

所以 $a_{2n-1} = 1 + 4(n-1) = 2(2n-1) - 1, a_{2n} = 3 + 4(n-1) = 2 \times 2n - 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.



(2) 由(1)知 $a_n = 2n - 1$, 可得 $S_n = \frac{(2n-1)(2n+1)+1}{4} = n^2$.

因为对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $2^n \cdot \lambda \geq S_n$ 恒成立, 所以 $\lambda \geq \frac{n^2}{2^n}$ 恒成立.

设 $b_n = \frac{n^2}{2^n}$, 则 $b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$.

当 $1 - \sqrt{2} < n < 1 + \sqrt{2}$, 即 $n = 1, 2$ 时, $b_{n+1} - b_n > 0$, 即 $b_n < b_{n+1}$;

当 $n > 1 + \sqrt{2}$, 即 $n \geq 3$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $b_{n+1} - b_n < 0$, 即 $b_n > b_{n+1}$.

所以 $b_1 < b_2 < b_3 > b_4 > b_5 > \dots$, 故 $(b_n)_{\max} = b_3 = \frac{9}{8}$, 所以 $\lambda \geq \frac{9}{8}$,

即实数 λ 的取值范围为 $\left[\frac{9}{8}, +\infty\right)$.

真题风向练

13. B 命题点 ①等差数列的通项公式及前 n 项和

【解析】由 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 3, a_4 = a_5 = 5$, 且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是一个首项为 7, 公差为 2 的等差数列, 可得这 12 个数依次为 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 且满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 1 + 2 \times 3 + 2 \times 5 + \frac{7 \times (7+19)}{2} = 108$. 设 $d_0 = \frac{d}{2}$ ($d_0 > 0$), 分组后对应的等差数列为 $x - 5d_0, x - 3d_0, x - d_0, x + d_0, x + 3d_0, x + 5d_0$ (提示: 项数为偶数的等差数列的设项方法),

则由组合前后 $a_1 + a_2 + \dots + a_{12}$ 不变可得 $x - 5d_0 + x - 3d_0 + x - d_0 + x + d_0 + x + 3d_0 + x + 5d_0 = 6x = 108$, 解得 $x = 18$.

因为原来的 12 个数均为奇数, 所以组合后的 6 个数均为偶数, 又 x 为偶数, 则 d_0 必为偶数.

因为 $x + 5d_0 = 18 + 5d_0 \leq 36$ (提示: 因为原来的 12 个数中最大的 2 个数为 17 和 19, 所以组合后的最大的数不能大于 36),

所以 $d_0 \leq 3$, 又 $d_0 > 0$, 所以 $d_0 = 2$, 所以 $d = 2d_0 = 4$ (提示: 设项时公差为 $2d_0$, 不要混淆). 故选 B.

一题多解 (排除法) 由题可得 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 依次为 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 108$.

设组合后的等差数列首项为 b_1 , 由题知公差为 d ($d > 0$), 项数 $n = 6$, 这 6 项的和 $S_6 = 6b_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 108$, 故 $2b_1 + 5d = 36$.

对于选项 B, 当 $d = 4$ 时, $b_1 = 8$, 此时原数列可重组为:

$\begin{matrix} 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\ 1 & 3 & 9 & 3 & 13 & 5 \\ & & 15 & 5 & 19 & 11 \\ & & & & 17 \end{matrix}$, 满足题意;

对于选项 A, 当 $d = 2$ 时, $b_1 = 13$, 是奇数, 而原数列中都是奇数, 故分组后的各项不可能是奇数, 排除 A;

对于选项 C, 当 $d = 6$ 时, $b_1 = 3$, 而原数列中最小的 2 个数为 1 和 3, 故 $b_1 \geq 4$, 排除 C (另解: 同选项 A, 利用奇偶关系排除);

对于选项 D, 当 $d = 8$ 时, $b_1 = -2$, 结合选项 C 的分析知 $b_1 \geq 4$, 排除 D. 故选 B.

第3节 等比数列及其前 n 项和

题型上分练

1. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), 因为 $a_1 + a_2 =$

$$-16, a_2 + a_3 = \frac{16}{3}, \text{ 所以 } \begin{cases} a_1 + a_1 q = -16, \\ a_1 q + a_1 q^2 = \frac{16}{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = -24, \\ q = -\frac{1}{3}. \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

2. D 【解析】因为 $S_1 + S_3 = 2S_2 + 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} +$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q^2\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q\right) + 1, \text{ 即 } q^2 - q - 2 = 0, \text{ 解得 } q = -1$$

或 $q = 2$, 又因为 $q > 0$, 所以 $q = 2$.

3. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 1$), $a_2 = 2a_4 +$

$$3a_6, \text{ 即 } a_2 = 2a_2 q^2 + 3a_2 q^4, \text{ 所以 } 1 = 2q^2 + 3q^4, \text{ 解得 } q^2 = \frac{1}{3} (q^2 =$$

$$-1 \text{ 舍去}), \text{ 所以 } \frac{a_4 - a_7}{a_2 - a_5} = \frac{q^2 - q^5}{1 - q^3} = q^2 = \frac{1}{3}. \text{ 故选 B.}$$

4. B 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$), 由 $a_2 = a_3 + 2a_4$, 得 $1 = q +$

$$2q^2, \text{ 则 } q = \frac{1}{2} \text{ (负值舍去)}. \text{ 又 } S_2 = 16, \text{ 所以 } S_6 = (a_1 + a_2) + (a_3 +$$

$$a_4) + (a_5 + a_6) = 16 + 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 21. \text{ 故选 B.}$$

5. A 【解析】由 $a_2 = 2, a_3 = 1$, 可得公比 $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}$.

$$\text{将 } q = \frac{1}{2}, a_2 = 2 \text{ 代入 } a_2 = a_1 q, \text{ 可得 } 2 = a_1 \times \frac{1}{2}, \text{ 解得 } a_1 = 4.$$

$$\text{所以 } a_4 = a_3 q = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_5 = a_4 q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$a_6 = a_5 q = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\text{所以 } a_1 a_2 \cdots a_6 = 4 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}. \text{ 故选 A.}$$

6. D 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q \neq 1$, 由 $a_1 + a_2 = a_4$ 得

$$a_1(1+q) = a_1 q^3, \text{ 即 } 1+q = q^3.$$

$$\frac{S_1 S_5}{S_2 S_3} = \frac{a_1 \times a_1 \times \frac{1-q^5}{1-q}}{a_1(1+q) \times a_1 \times \frac{1-q^3}{1-q}} = \frac{1-q^5}{(1+q) \times (1-q^3)},$$

因为 $1+q = q^3$, 所以 $1-q^5 = 1-q^2(1+q) = 1-q^2-q^3 = -q-q^2$, 所以

$$\frac{S_1 S_5}{S_2 S_3} = \frac{-q-q^2}{(1+q) \times (-q)} = 1, \text{ 故选 D.}$$

7. A 【解析】 $\because \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等比数列, $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的首项为 a_1 , 第二项

$$\text{为 } \frac{S_2}{2}, \text{ 第三项为 } \frac{S_3}{3} = \frac{S_2 + a_3}{3} = \frac{S_2 + 2S_2}{3} = S_2, \therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\} \text{ 的公比为 } 2,$$

$$\therefore S_n = n a_1 \cdot 2^{n-1}, \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时}, a_n = S_n - S_{n-1} = (n+1) a_1 \cdot 2^{n-2},$$

显然当 $n=1$ 时也符合, $\therefore a_n = (n+1) a_1 \cdot 2^{n-2} (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\therefore \frac{a_9}{a_4} = \frac{(9+1) a_1 \cdot 2^7}{(4+1) a_1 \cdot 2^2} = 64. \text{ 故选 A.}$$



8.15 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_4 = a_1 q^3 = q^3 = 8$, 解得 $q = 2$,

$$\text{所以 } S_4 = \frac{1 \times (1-2^4)}{1-2} = \frac{-15}{-1} = 15.$$

9. $\frac{3}{2}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$.

由 $2a_8 + a_5 = a_2$, 得 $2a_2 q^6 + a_2 q^3 = a_2$, 即 $2q^6 + q^3 - 1 = 0$, 解得 $q^3 = \frac{1}{2}$ 或 $q^3 = -1$ (舍).

$$\text{易知 } q \neq 1, \text{ 则 } S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}, S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}, \text{ 则 } \frac{S_6}{S_3} = \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = 1+q^3 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

10. 【解】(1) 由 $a_{n+1} = 2S_n + 3$, 得 $a_n = 2S_{n-1} + 3 (n \geq 2)$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) (n \geq 2)$,

$$\text{即 } a_{n+1} - a_n = 2a_n (n \geq 2), a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2),$$

又 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则其公比 $q = 3$.

$$\text{又当 } n=1 \text{ 时, } a_2 = 2S_1 + 3 = 2a_1 + 3 = 3a_1,$$

$$\text{所以 } a_1 = 3, \text{ 所以 } a_n = 3^n.$$

$$(2) \text{ 数列 } \{b_n\} \text{ 为 } 3, -1, 3^2, 1, 1, 3^3, -1, -1, -1, 3^4, \dots,$$

$$\text{按如下划分: } 3, |-1, 3^2, |1, 1, 3^3, |-1, -1, -1, 3^4, |, \dots,$$

$$\text{得项数 } X_n = 1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{当 } n=8 \text{ 时, 项数 } X_8 = 36, \text{ 当 } n=9 \text{ 时, 项数 } X_9 = 45,$$

$$\text{所以 } T_{40} = 3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^8 + (-1) \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 3 + \dots + 1 \times 6 + (-1) \times 7 + 1 \times 4 = \frac{3 \times (1-3^8)}{1-3} + 3-7+4 = \frac{3}{2} \times (3^8-1) = 9\,840.$$

11. B 【解析】若 $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$, 当 $a_n = 1, a_{n+1} =$

$$2, a_{n+2} = 3, a_{n+3} = 6 \text{ 时满足 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = 2, \text{ 但数列 } \{a_n\} \text{ 不是等}$$

比数列, 所以充分性不成立;

若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = q, \text{ 所以 } a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}, \text{ 必要性成立.}$$

所以甲是乙的必要不充分条件. 故选 B.

12. B 【解析】因为 $a_{n+1} = 2a_n - 2$, 所以 $a_{n+1} - 2 = 2a_n - 4 = 2(a_n -$

$$2), \text{ 所以 } \frac{a_{n+1}-2}{a_n-2} = 2, \text{ 所以 } \{a_n-2\} \text{ 是以 } a_1-2=2 \text{ 为首项, } 2 \text{ 为}$$

$$\text{公比的等比数列, 所以 } a_n-2 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n, \text{ 所以 } a_n = 2^n + 2.$$

$$\text{由 } \lambda(a_n-2) < a_n-6 \text{ 恒成立, 得 } \lambda < \frac{a_n-6}{a_n-2} = \frac{a_n-2-4}{a_n-2} = 1 - \frac{4}{a_n-2} =$$

$$1 - \frac{4}{2^n} \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } y = 1 - \frac{4}{2^n}, \text{ 由于 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 显然 } y \text{ 关于 } n \text{ 单调递增, 所以当}$$

$$n=1 \text{ 时, } y_{\min} = 1 - \frac{4}{2^1} = -1, \text{ 所以 } \lambda < -1. \text{ 故选 B.}$$

13. (1) 【证明】由 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, 得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$,



即 $b_{n+1} = 3b_n$, 又 $b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列.

(2)【解】由(1)得 $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$, 即 $a_{n+1} - a_n = 3^n$,

于是当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) +$

$$a_1 = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}, \text{ 经验}$$

证 $n=1$ 时也符合上式, 故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{3^n-1}{2}$.

14. (1)【证明】由题得 $S_n + 3 = a_{n+1} + n$ ①,

当 $n=1$ 时, $a_1 + 3 = a_2 + 1$, 由 $a_1 = 3$, 解得 $a_2 = 5$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} + 3 = a_n + n - 1$ ②,

①-②得 $a_n = a_{n+1} - a_n + 1$, 即 $a_{n+1} = 2a_n - 1$,

从而 $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$, $n \geq 2$.

又因为 $a_1 - 1 = 2$, $a_2 - 1 = 4$, 所以当 $n=1$ 时也满足上式, 所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

(2)【解】由(1)得 $a_n - 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 则 $a_n = 2^n + 1$,

从而 $b_n = na_n = n \cdot 2^n + n$,

所以 $T_n = (1 \times 2^1 + 1) + (2 \times 2^2 + 2) + \cdots + (n \cdot 2^n + n)$

$$= (1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n),$$

令 $R_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n$ ③,

则 $2R_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$ ④,

$$\text{③-④得 } -R_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2-2^{n+1}}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} =$$

$$(1-n)2^{n+1} - 2,$$

所以 $R_n = (n-1)2^{n+1} + 2$,

$$\text{又 } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ 所以 } T_n = (n-1)2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} + 2.$$

15. (1)【证明】由题意知 $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n}$, $b_n = \frac{1}{a_n-2} + \frac{1}{3}$,

$$\text{所以 } b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}-2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{a_n+2}{a_n}-2} + \frac{1}{3} = \frac{a_n}{2-a_n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{2-a_n} - 1 +$$

$$\frac{1}{3} = -2 \left(\frac{1}{a_n-2} + \frac{1}{3} \right),$$

$$\text{即 } b_{n+1} = -2b_n, \text{ 又 } b_1 = \frac{1}{a_1-2} + \frac{1}{3} = -2,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 -2, 公比为 -2 的等比数列.

(2)【解】由(1)知 $b_n = (-2)^n$,

$$\text{所以 } x_n = \frac{1}{\log_4 2^n \cdot \log_4 2^{n+1}} = \frac{4}{n(n+1)} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

所以 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$$= 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} \right) + 4 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + 4 \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 4 \times \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1}.$$

16. B 【解析】由题知 $a_2 a_3 = a_1 a_4 = 8$, 易知 a_1, a_4 是方程 $x^2 -$



$9x+8=0$ 的两个根, 又 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列, 所以 $a_1=1$,

$a_4=8$, 故公比 $q=\left(\frac{a_4}{a_1}\right)^{\frac{1}{3}}=2$. 故选 B.

17. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 若 $S_4=4, S_8=12$, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$, 故 $a_5+a_6+a_7+a_8=q^4(a_1+a_2+a_3+a_4)=12-4=8$, 即 $4q^4=8$, 所以 $q^4=2$, 故 $a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=(a_1+a_2+a_3+a_4)q^{12}=4\times 2^3=32$.

一题多解 由等比数列的前 n 项和的性质知 $S_4, S_8-S_4, S_{12}-S_8, S_{16}-S_{12}, \dots$ 仍成等比数列, 因为 $S_4=4, S_8-S_4=8$, 所以 $S_{12}-S_8=16, S_{16}-S_{12}=32$, 故 $a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=S_{16}-S_{12}=32$.

18. D 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以根据二级结论可知数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为公比为 $\frac{1}{q}$ 的等比数列.

设 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 S_9 , $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 9 项和为 T_9 ,

$$\text{则 } S_9 = \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{12}{5}, T_9 = \frac{\frac{1}{a_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{q}\right)^9\right]}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{\frac{q}{a_1} - \frac{1}{a_1 q^8}}{q-1} =$$

$$\frac{1}{a_1 a_9} \cdot \frac{a_1(q^9-1)}{q-1} = \frac{1}{a_5^2} \cdot S_9 = \frac{1}{4} \times \frac{12}{5} = \frac{3}{5}.$$

19. ABD 【解析】对于 A, C, 由 $0 < a_1 < 1, a_{2\ 024} a_{2\ 025} > 1, \frac{a_{2\ 024}-1}{a_{2\ 025}-1} <$

0 , 得 $0 < a_{2\ 024} < 1, a_{2\ 025} > 1$, 所以 $q > 1$, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, T_n 的最小值为 $T_{2\ 024}$, 故 A 正确, C 错误;

对于 B, $a_{2\ 024} a_{2\ 026} = a_{2\ 025}^2 > 1$ (提示: 等比中项的性质), 故 B 正确;

对于 D, $T_{4\ 047} = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{4\ 047} = a_{2\ 024}^{4\ 047} < 1$, 故 D 正确. 故选 ABD.

20. -12 【解析】等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_5=-4, S_{10}=4$, 因为 $S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}, \dots$ 也成等比数列, 则 $(S_{10}-S_5)^2 = S_5(S_{15}-S_{10})$, 即 $8^2 = -4 \times (S_{15}-4)$, 解得 $S_{15}=-12$.

21. 1 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=63$, 其中 $a_2+a_4+a_6=2(a_1+a_3+a_5)$, 又 $a_2+a_4+a_6=q(a_1+a_3+a_5)$, 故 $q=2$ (快解: 利用结论若等比数列 $\{a_n\}$ 的

项数为 $2n$, 则 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}}=q$, 直接得到 $q=2$), 所以 $3(a_1+a_3+a_5)=63$, 即 $a_1+a_3+a_5=21$, 所以 $a_1+a_1q^2+a_1q^4=a_1+4a_1+16a_1=21$, 解得 $a_1=1$.

22. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$. 由 $a_1+a_2+a_{12}=18$, 得 $3a_1+12d=18$, 即 a_1+



$4d=6$, 所以 $a_5=6$. 由 $b_1b_3b_{11}=64$, 得 $b_1^3q^{12}=64$, 即 $b_1q^4=4$,

所以 $b_5=4$, 所以 $\frac{a_5}{1+b_5}=\frac{6}{5}$. 故选 B.

23. B 【解析】设第 n 次检测时, 给药时间为 b_n , 则 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $b_n=3+2(n-1)=2n+1$. 设当给药时间为 $(2n+1)$ 小时的时候, 患者血药浓度为 a_n , 血药浓度峰值为 a , 则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a , 公比为 0.4 的等比数列, 所以 $a_n=a \times 0.4^{n-1}$.

令 $a_n=0.01024a$, 即 $(0.4)^5a=a \times 0.4^{n-1}$, 解得 $n=6$, 当血药浓度为峰值的 1.024% 时, 给药时间 $b_6=2 \times 6+1=13$ (小时), 故选 B.

24. ACD 【解析】由 $S_n=n^2+n$, 得 $S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$, $n \geq 2$, 则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$, 而 $a_1=S_1=2$ 满足上式, 因此数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$.

对于 A, $a_2=4$, A 正确;

对于 B, $\frac{S_n}{a_n}=\frac{n^2+n}{2n}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$, $\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\frac{1}{2}$, 所以数列

$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列, B 错误;

对于 C, $2^{a_n}=4^n$, $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=4$, 所以数列 $\{2^{a_n}\}$ 是公比为 4 的等比

数列 (提示: 直接用结论, $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow \{a^{a_n}\}$ ($a>0$, 且 $a \neq 1$) 是等比数列), C 正确;

对于 D, 令 $b_n=(-1)^n a_n$, 则 $b_n=(-1)^n \cdot 2n$, $b_{2n-1}+b_{2n}=-2(2n-1)+2 \cdot 2n=2$, 故数列 $\{b_n\}$ 的前 2 025 项和为 $(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{2023}+b_{2024})+b_{2025}=2 \times 1012-2 \times 2025=-2026$, D 正确. 故选 ACD.

25. 13 【解析】由题知 $\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7=91$, 解得 $a_7=7$, 所以

$b_7=7$, 所以 $\log_7 b_1+\log_7 b_2+\cdots+\log_7 b_{13}=\log_7 (b_1 b_2 \cdots b_{13})=\log_7 b_7^{13}=\log_7 7^{13}=13$.

一题多解 根据结论: $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 $\Leftrightarrow$

$\{\log_7 b_n\}$ 是等差数列. 所以 $\log_7 b_1+\log_7 b_2+\cdots+\log_7 b_{13}=13\log_7 b_7$ (提示: 利用等差数列下标和的性质). 由题可得

$\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7=91$, 解得 $a_7=7=b_7$, 所以原式 $=13\log_7 b_7=13$.

26. (1) 【解】 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $d \neq 0$, 由 $a_1+a_2+\cdots+a_5=5a_3=5(a_1+2d)=35$, 得 $a_1+2d=7$.

因为 a_1, a_2, a_6 成等比数列, 所以 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$, 即 $d^2=3a_1d$, 又 $d \neq 0$, 所以 $d=3a_1$.

代入 $a_1+2d=7$, 可得 $a_1=1, d=3$. 故 $a_n=3n-2$.



$$(2) \text{【证明】} b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right),$$

$$\text{故 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right),$$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) < \frac{1}{3}$, 故得证.

27. (1) 【解】由题意得 $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$.

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以公差 $d = a_2 - a_1 = 2$,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$.

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$.

(2) 【证明】因为 $b_n = a_{2^n} + 1$, 所以 $b_{n+1} = a_{2^{n+1}} + 1 = a_{2 \times 2^n} + 1 = (2a_{2^n} + 1) + 1 = 2(a_{2^n} + 1) = 2b_n$, 由 $a_{2^{n+1}} = 2a_{2^n} + 1$ 可知 $a_{2^n} > 0$,

则 $b_n = a_{2^n} + 1 > 0$, 所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

$$28. \text{【解】} (1) \text{ 因为 } a_2 = 3, \text{ 所以 } \begin{cases} b_3 = a_2 - d = 3 - d, \\ 2b_1 = a_2 + a_3 = 3 + 3 + d, \text{ 故 } b_1 = \frac{6+d}{2}, \\ 2b_2 = a_1 + a_2 = 3 - d + 3, \end{cases}$$

$$b_2 = \frac{6-d}{2}, b_3 = 3-d.$$

由 $b_2^2 = b_1 b_3$ 得 $d^2 - 2d = 0$, 解得 $d = 2$ 或 $d = 0$ (舍去),

所以 $a_1 = 3 - 2 = 1$.

故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$.

由 $d = 2$ 得 $b_2 = \frac{6-d}{2} = 2, b_1 = \frac{6+d}{2} = 4$,

故公比 $q = \frac{1}{2}$, 所以 $b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

$$(2) a_n + b_n = 2n-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

故 $S_n = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n$

$$\begin{aligned} &= 1 + 3 + \cdots + 2n-1 + 4 + 2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &= \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = n^2 + 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

$$(3) c_n = a_n b_n = \frac{2n-1}{2^{n-3}}, c_{n+1} = a_{n+1} b_{n+1} = \frac{2n+1}{2^{n-2}},$$

$$\text{所以 } c_{n+1} - c_n = \frac{2n+1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^{n-3}} = \frac{3-2n}{2^{n-2}},$$

当 $n = 1$ 时, $c_2 - c_1 > 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $c_{n+1} - c_n < 0$,

所以当 $n = 1$ 时, $c_2 > c_1$, 当 $n \geq 2$ 时, $c_{n+1} < c_n$.

29. (1) 【证明】 $S_n = a_n - 4a_{n+1}$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = a_{n-1} - 4a_n$,

两式相减得 $a_n = a_n - a_{n-1} - 4a_{n+1} + 4a_n$, 即 $4a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$,

则有 $2(2a_{n+1} - a_n) = 2a_n - a_{n-1}$.

当 $n = 1$ 时, $S_1 = a_1 - 4a_2$, 则 $a_2 = 0$, 则 $2a_2 - a_1 = 1 \neq 0$,



所以数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(2)【解】由(1)得, $2a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, 则 $2^n a_{n+1} - 2^{n-1} a_n = 1$, 所以

数列 $\{2^{n-1} a_n\}$ 是首项为 -1, 公差为 1 的等差数列, 则 $2^{n-1} a_n =$

$$n-2, \text{ 故 } a_n = \frac{n-2}{2^{n-1}},$$

$$\text{则 } b_n = \frac{n+2}{2^{n+3} n(n+1)} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2^{n-1} n} - \frac{1}{2^n (n+1)} \right],$$

所以 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{8} \times \left[\left(1 - \frac{1}{2 \times 2} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{2^2 \times 3} \right) + \cdots + \right.$

$$\left. \left(\frac{1}{2^{n-1} n} - \frac{1}{2^n (n+1)} \right) \right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+3} (n+1)}.$$

(3)【解】因为 $a_n = \frac{n-2}{2^{n-1}}, S_n = a_n - 4a_{n+1}$,

$$\text{所以 } S_n = \frac{n-2}{2^{n-1}} - 4 \cdot \frac{n-1}{2^n} = -\frac{n}{2^{n-1}}.$$

若 S_p, S_6, S_q 成等差数列, 则 $-\frac{12}{2^5} = -\frac{p}{2^{p-1}} - \frac{q}{2^{q-1}}$, 整理得 $\frac{p}{2^p} +$

$$\frac{q}{2^q} = \frac{3}{16}, \text{ 所以 } \frac{p}{2^p} < \frac{3}{16}.$$

令 $d_n = \frac{n}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $d_{n+1} - d_n = \frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0$, 则 $d_1 = d_2 > d_3 > d_4 >$

$d_5 > \cdots$.

因为 $1 \leq p < 6, p \in \mathbf{N}^*, \frac{4}{2^4} > \frac{3}{16}, \frac{5}{2^5} < \frac{3}{16}$,

所以 $p=5$, 因此 $\frac{5}{32} + \frac{q}{2^q} = \frac{3}{16}$, 即 $\frac{q}{2^q} = \frac{1}{32}$.

因为 $q > 6, \frac{8}{2^8} = \frac{1}{32}$, 所以 $q=8$,

所以存在 $p=5, q=8$, 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列.

易错警示

裂项相消法求和, 要注意正负项相消时消去了哪些项, 保留了哪些项, 切不可漏写未被消去的项, 未被消去的项有前后对称的特点, 实质上引起正负相消是此法的根源与目的.



综合提分练

1. C 必刷考点 ①等差数列基本量计算、等比中项

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $S_3 = 3a_2 = 3(a_1 + d)$,

又 $S_3 = a_5$, 所以 $3(a_1 + d) = a_1 + 4d$, 即 $d = 2a_1$.

若 a_1, a_2, a_m 成等比数列, 则 $a_1 \neq 0, a_2^2 = a_1 a_m = a_1 [a_1 + (m-1)d]$, 即 $10a_1^2 - 2a_1^2 m = 0$, 解得 $m=5$, 故选 C.

2. B 必刷知识 ②等比数列的性质

【解析】因为 a_6, a_{10} 为方程 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 的两根, 所以根据根与

系数的关系得 $\begin{cases} a_6 + a_{10} = -4, \\ a_6 \cdot a_{10} = 3, \end{cases}$ 所以 a_6, a_{10} 均为负数.

关键点



由等比中项的性质得 $a_8^2 = a_6 \cdot a_{10} = 3$, 所以 $a_8 = \pm\sqrt{3}$, 由于等比数列中偶数项同号, 故 $a_8 < 0$, 所以 $a_8 = -\sqrt{3}$. 故选

易错点

B.

易错警示 本题容易忽略 a_6, a_{10} 的正负, 以及 a_6, a_8, a_{10}

同号, 而错选 C. 对于 $a_n, a_{n+2m}, a_{n+2t} (m, n, t \in \mathbf{N}^*, m < t)$, 它们的下标的差值为偶数, 即 $a_{n+2m} = a_n \cdot q^{2m}, a_{n+2t} = a_n \cdot q^{2t}$, 所以 a_n, a_{n+2m}, a_{n+2t} 的符号相同.

3. C 必刷题型 ⊙ 等比数列片段和的性质及应用

【解析】由题可知 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9, S_{15} - S_{12}$ 成等比数列, 则 $(S_6 - S_3)^2 = S_3(S_9 - S_6)$, 即 $(-3)^2 = S_3 \times 9$, 得 $S_3 = 1$, 故所成等比数列的首项是 1, 公比是 -3,

那么 $S_{12} - S_9 = a_{10} + a_{11} + a_{12} = 9 \times (-3) = -27, S_{15} - S_{12} = a_{13} + a_{14} + a_{15} = -27 \times (-3) = 81$,

所以 $S_{15} = 1 + (-3) + 9 + (-27) + 81 = 61$. 故选 C.

4. BD 必刷考点 ⊙ 等差数列的前 n 项和

【解析】当 $n = 1$ 时, $S_1 = 2a_1 + 1$, 解得 $a_1 = -1$. 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2a_n + 1$, 所以 $S_n - S_{n-1} = a_n = 2a_n + 1 - (2a_{n-1} + 1) = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = -2^{n-1}$, 故 A 错误, B 正确.

$S_n = 2a_n + 1 = -2^n + 1$, 故 C 错误.

$a_1 a_2 \cdots a_{2n} = (-1) \times (-2) \times \cdots \times (-2^{2n-1}) = (-1)^{2n} \times 2^{0+1+2+\cdots+2n-1} = 2^{\frac{(0+2n-1)2n}{2}} = 2^{2n^2-n}$, 故 D 正确.

5. BCD 必刷题型 ⊙ 等差、等比数列的判断

【解析】对于 A, 当 $a_{n+1} + a_n = f(n) = 2n$ 时, 若 $a_1 = 2$, 则 $a_2 = 0, a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 6, \cdots$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 故 A 错误;

对于 B, 当 $a_{n+1} + a_n = f(n) = 2n + 1$ 时, $a_{n+1} - n - 1 = -(a_n - n)$, 因为 $a_1 - 1 = 0$, 所以 $a_n - n = 0$, 即 $a_n = n$, 因为 $a_{n+1} - a_n = n + 1 - n = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 B 正确;

对于 C, 当 $a_{n+1} + a_n = f(n) = 4$ 时, 有 $a_{n+1} - 2 = -(a_n - 2)$, 因为 $a_1 - 2 = 0$, 所以 $a_n - 2 = 0$, 即 $a_n = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是等比数列, 故 C 正确;

对于 D, 当 $a_{n+1} + a_n = f(n) = 3 \times 2^{n-1}$ 时, 有 $a_{n+1} - 2^n = -(a_n - 2^{n-1})$, 因为 $a_1 - 2^0 = 0$, 所以 $a_n - 2^{n-1} = 0$, 即 $a_n = 2^{n-1}$, 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$\frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是等比数列, 故 D 正确. 故选 BCD.

6. B 必刷题型 ⊙ 正三角形的内切圆问题, 等比数列求和问题

【解析】设第 n 个正三角形的内切圆半径为 a_n , 第 n 个正三角形的边长为 b_n , 可知 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{6} b_n$ (记忆: 正三角形内切圆半径是正三角形边长的 $\frac{\sqrt{3}}{6}$).



又半径为 a_n 的圆的内接三角形的边长 b_{n+1} 满足 $\frac{b_{n+1}}{\sin 60^\circ} = 2a_n$, 即 $b_{n+1} = \sqrt{3}a_n$.

所以 $b_{n+1} = \sqrt{3}a_n = \frac{1}{2}b_n$, $a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{6}b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, 即从第二个正三

关键点

角形开始, 每个正三角形的边长是前一个的 $\frac{1}{2}$, 每个正三角

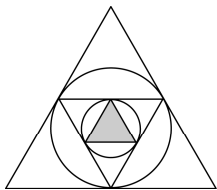
形的内切圆半径也是前一个正三角形内切圆半径的 $\frac{1}{2}$.

又 $a_1 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比

的等比数列, 所以 $a_n = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 则 $\pi a_n^2 = 3\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. 设前

n 个内切圆的面积之和为 S_n , 则 $S_n = 3\pi \times \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} =$

$\pi \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$. 故选 B.



7. ACD 必刷考点 ① 曲线的切线方程, 等比数列求和、求通项

【解析】 因为 $f(x) = x^2 - 4$, 所以 $f'(x) = 2x$, 所以曲线 $f(x)$ 在点 $(x_n, x_n^2 - 4)$ 处的切线方程为 $y - (x_n^2 - 4) = 2x_n(x - x_n)$.

对于 A, 在切线方程中, 令 $y = 0$, 得 $-(x_n^2 - 4) = 2x_n(x_{n+1} - x_n)$,

所以 $x_{n+1} - x_n = \frac{4 - x_n^2}{2x_n}$, 即 $x_{n+1} = \frac{4 - x_n^2}{2x_n} + x_n = \frac{4 + x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$, 故 A 正确.

对于 B, 易知 $\frac{x_1 + 2}{x_1 - 2} = 5$, $\frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 2} = \frac{\frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} + 2}{\frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} - 2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4}{x_n^2 - 4x_n + 4} =$

$\frac{(x_n + 2)^2}{(x_n - 2)^2}$, 两边取自然对数得 $\ln \frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 2} = \ln \frac{(x_n + 2)^2}{(x_n - 2)^2} =$

$2 \ln \frac{x_n + 2}{x_n - 2}$, 所以数列 $\left\{ \ln \frac{x_n + 2}{x_n - 2} \right\}$ 是以 $\ln 5$ 为首项, 2 为公比的

等比数列, 故 B 错误.

对于 C, 由 B 可知 $\ln \frac{x_n + 2}{x_n - 2} = 2^{n-1} \times \ln 5 = \ln 5^{2^{n-1}}$, 即 $\frac{x_n + 2}{x_n - 2} = 5^{2^{n-1}}$,

即 $x_n = \frac{2(5^{2^{n-1}} + 1)}{5^{2^{n-1}} - 1}$, 故 C 正确.

对于 D, 易知 $x_1 - 2 = 1$, $x_{n+1} - 2 = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} - 2 = \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{2x_n} =$

$\frac{(x_n - 2)^2}{2x_n}$, $x_n - 2 = \frac{2(5^{2^{n-1}} + 1)}{5^{2^{n-1}} - 1} - 2 = \frac{4}{5^{2^{n-1}} - 1} > 0$, 所以 $x_n > 2$, $x_{n+1} -$



$$2 = \frac{(x_n - 2)^2}{2x_n} < \frac{(x_n - 2)^2}{4}. \text{ 设 } a_n = x_n - 2, \text{ 则 } a_{n+1} < \frac{1}{4}a_n^2, \text{ 所以 } a_1 = 1, a_2 < \frac{1}{4}a_1^2 = \frac{1}{4}, a_3 < \frac{1}{4}a_2^2 < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^3, a_4 < \frac{1}{4}a_3^2 < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 < \left(\frac{1}{4}\right)^5, \dots, a_n < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \text{ 所以 } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] < \frac{4}{3} < 2, \text{ 即数列 } \{x_n - 2\} \text{ 的前 } n \text{ 项和小于 } 2, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.}$$

8. 1, -2, 4 (答案不唯一) 必刷考点 ⊙ 等差中项的应用、等比数列基本量的计算

【解析】设等比数列 a_1, a_2, a_3 的公比为 $q (q \neq 1)$, 则等比数列可写为 a_1, a_1q, a_1q^2 .

不妨设调整顺序后的等差数列为 a_1q, a_1, a_1q^2 , 则 $2a_1 = a_1q + a_1q^2$,

$\because a_1 \neq 0, \therefore 2 = q + q^2$, 解得 $q = -2$ 或 $q = 1$ (舍).

令 $a_1 = 1$, 则 $a_2 = -2, a_3 = 4, \therefore$ 满足条件的一组 a_1, a_2, a_3 的值依次为 1, -2, 4.

9. 10 或 4 049 必刷考点 ⊙ 等比数列的基本量计算

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q \neq 0$ 且 $q \neq 1$,

由 $a_{2\,025} = 1$, 得 $a_1 \cdot q^{2\,024} = 1$, 故 $a_1 = q^{-2\,024}$.

又 $a_1 a_2 \cdots a_5 = a_1 a_2 \cdots a_{m-5} (m \in \mathbf{N}^*, m > 5), \therefore a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot \cdots \cdot a_1q^4 = a_1 \cdot a_1q \cdot \cdots \cdot a_1q^{m-5-1}, \therefore a_1^5 q^{1+2+3+4} =$

$a_1^{m-5} q^{1+2+\cdots+(m-6)}$, 即 $a_1^5 q^{10} = a_1^{m-5} q^{\frac{(m-6)(1+m-6)}{2}}, \therefore 1 = a_1^{m-10} \cdot q^{\frac{(m-5)(m-6)}{2}-10}$, 又 $a_1 = q^{-2\,024}, \therefore 1 = q^{-2\,024(m-10)} \cdot q^{\frac{(m-5)(m-6)}{2}-10} = q^{-2\,024(m-10) + \frac{(m-5)(m-6)}{2}-10}, \therefore -2\,024(m-10) + \frac{(m-5)(m-6)}{2} -$

$10 = 0$, 化简整理得 $m^2 - 4\,059m + 40\,490 = 0$, 即 $(m - 4\,049)(m - 10) = 0$, 解得 $m = 10$ 或 $m = 4\,049$, 均满足 $m \in \mathbf{N}^*, m > 5$.

10. $n^2 + n + \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}$ 必刷考点 ⊙ 等差、等比数列的前 n 项和, 分组求和

【解析】 $\because a_{n+1} = a_n^2, \therefore \ln a_{n+1} = \ln a_n^2 = 2 \ln a_n$, 又 $a_1 = e, \therefore$ 数列 $\{\ln a_n\}$ 是首项为 $\ln a_1 = 1$, 公比为 2 的等比数列, $\therefore \ln a_n = 2^{n-1}$.

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n^2 + n}{2}, \therefore b_1 = 1$, 则当 $n \geq 2$ 时, $b_n =$

$\frac{n^2 + n}{2} - \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = n$, 且 $b_1 = 1$ 符合该式,

$\therefore b_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$

$\therefore c_n = \begin{cases} 2^{n-1}, & n \text{ 为奇数,} \\ n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$



$$\therefore S_{2n} = (2+4+\cdots+2n) + (2^0+2^2+\cdots+2^{2n-2}) = \frac{(2n+2)n}{2} +$$

$$\frac{1 \cdot (1-4^n)}{1-4} = n^2 + n + \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}.$$

11. 必刷考点 ⊙ 等差数列的通项公式、等比数列的判断

(1) 【证明】方法一：对于 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+1}$ ，若 $a_n = 1$ ，则 $a_{n+1} = 1$ 。

若 $a_{n+1} = 1$ ，则 $a_n = 1$ ，又 $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $\therefore a_n \neq 1$ ，

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - 1}{\frac{1}{a_n} - 1} = \frac{\frac{a_n+1}{2a_n} - 1}{\frac{1}{a_n} - 1} = \frac{\frac{1-a_n}{2a_n}}{\frac{1-a_n}{a_n}} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } b_1 = \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{2},$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$ ，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

方法二： $\because a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+1}$ ， $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $\therefore a_n > 0$ ， $\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n+1}{2a_n} - 1 =$

$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)$ ，即 $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ ，又 $b_1 = \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \{b_n\}$ 是首项

为 $\frac{1}{2}$ ，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列。

(2) 【解】不存在。理由如下：

由(1)知 $b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ，

由题意知 $b_{n+1} = b_n + (n+2-1)d_n$ ，

$$\text{即 } d_n = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)2^{n+1}},$$

假设存在 3 项 d_m, d_k, d_p 成等比数列，则 $d_k^2 = d_m d_p$ ，且 $k \neq m \neq p$ ，

$$\therefore \left[\frac{-1}{(k+1)2^{k+1}} \right]^2 = \frac{-1}{(m+1)2^{m+1}} \cdot \frac{-1}{(p+1)2^{p+1}}, \therefore m+p=2k,$$

$\therefore$ 化简可得 $k^2 = mp$ ， $\therefore k=m=p$ ，这与已知条件 m, k, p 互不相等矛盾，

$\therefore$ 数列 $\{d_n\}$ 中不存在 3 项 d_m, d_k, d_p (其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列。

12. 必刷题型 ⊙ 根据递推关系求数列的通项、裂项法求和

(1) 【解】数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{4}{3}$ ， $a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}$ ，则 $a_2 = \frac{2}{3-a_1} =$

$$\frac{2}{3-\frac{4}{3}} = \frac{6}{5}, a_3 = \frac{2}{3-a_2} = \frac{2}{3-\frac{6}{5}} = \frac{10}{9}.$$

(2) 【证明】 $a_1 = \frac{4}{3} \neq 1$ ，若 $a_n = 1 (n \geq 2)$ ，则由 $a_n = \frac{2}{3-a_{n-1}} =$

1，得 $a_{n-1} = 1$ ，故 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 1$ ，矛盾，故 $a_n \neq 1$ ；同

理可证得 $a_n \neq 2$ 。由 $b_n = \frac{2-a_n}{a_n-1}$ ，得 $b_{n+1} = \frac{2-a_{n+1}}{a_{n+1}-1} = \frac{2-\frac{2}{3-a_n}}{\frac{2}{3-a_n}-1} = \frac{2-\frac{2}{3-a_n}}{\frac{2}{3-a_n}-1}$



$$\frac{4-2a_n}{a_n-1}, \text{ 则 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4-2a_n}{a_n-1} \cdot \frac{a_n-1}{2-a_n} = 2, \text{ 又 } b_1 = \frac{2-a_1}{a_1-1} = 2,$$

所以 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

$$(3) \text{【解】由 (2) 知 } b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n = \frac{2-a_n}{a_n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2^n+2}{2^n+1},$$

$$\text{则 } c_n = (a_{n+1} - 1)(2 - a_n) = \left(\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}+1} - 1\right) \left(2 - \frac{2^n+2}{2^n+1}\right) = \frac{2^n}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} = \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1},$$

$$\text{故 } S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}+1}.$$

13. 必刷题型 ⊙ 数列的新定义问题

(1) 【解】由于两实数相乘满足交换律, 故不妨设 $i < j$,

$$\text{则 } a_3 = a_1 a_2 = 2 \times 4 = 8.$$

(2) 【解】若对任意 $n \in \mathbf{N}^* (n \geq 2)$, $a_n > a_{n-1}$, 则 $a_4 = a_1 a_3 = 2 \times 8 = 16$ 或 $a_4 = a_2 a_3 = 4 \times 8 = 32$.

① 若 $a_4 = 16$, 则 $a_5 = a_1 a_4 = 2 \times 16 = 32$ 或 $a_5 = a_2 a_3 = 4 \times 8 = 32$ 或 $a_5 = a_2 a_4 = 4 \times 16 = 64$ 或 $a_5 = a_3 a_4 = 8 \times 16 = 128$;

② 若 $a_4 = 32$, 则 $a_5 = a_1 a_4 = 2 \times 32 = 64$ 或 $a_5 = a_2 a_4 = 4 \times 32 = 128$ 或 $a_5 = a_3 a_4 = 8 \times 32 = 256$.

综上, 当 $a_4 = 16$ 时, a_5 的所有可能取值为 32, 64, 128; 当 $a_4 = 32$ 时, a_5 的所有可能取值为 64, 128, 256.

(3) 【证明】因为 $a_1 = 2, a_2 = 4 = 2^2$, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^* (n \geq 3)$, 总存在 $i, j \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_n = a_i a_j (i \neq j, i < n, j < n)$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都可以写成 2 的正整数指数幂的形式,

又因为对任意 $n \in \mathbf{N}^* (n \geq 2)$, $a_n > a_{n-1}$, 所以 $a_n \geq 2a_{n-1}$,

所以 $a_n \geq 2a_{n-1} \geq 2^2 a_{n-2} \geq \cdots \geq 2^{n-k} a_k, k \in \mathbf{N}^*$, 且 $k < n$,

$$\text{所以 } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots + a_{n-1} + a_n \leq \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^{n-2}} + \frac{a_n}{2^{n-3}} + \cdots +$$

$$\frac{a_n}{2^{n-k}} + \cdots + \frac{a_n}{2} + a_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-k}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right) a_n =$$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \cdot a_n = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \cdot a_n < 2a_n.$$

14. 必刷题型 ⊙ 等比数列与概率的综合问题

(1) 【解】投掷 2 次骰子后, 球在乙手中, 只有 1 种情况:

$$\text{甲} \rightarrow \text{甲} \rightarrow \text{乙}, \text{ 其概率为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 故 } P_2 = \frac{1}{4}.$$

投掷 3 次骰子后, 球在乙手中, 共有 3 种情况:

$$\text{① 甲} \rightarrow \text{乙} \rightarrow \text{甲} \rightarrow \text{乙}, \text{ 其概率为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12};$$



②甲 $\rightarrow$ 乙 $\rightarrow$ 丙 $\rightarrow$ 乙,其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

③甲 $\rightarrow$ 甲 $\rightarrow$ 甲 $\rightarrow$ 乙,其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

所以投掷 3 次后,球在乙手中的概率 $P_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

(2)【解】由于投掷 n 次骰子后球不在乙手中的概率为 $1 - P_n$,此时无论球在甲手中还是球在丙手中,均有 $\frac{1}{2}$ 的概率传

给乙,故有 $P_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - P_n)$,

变形为 $P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$. 又 $P_1 = \frac{1}{2}$,所以数列

$\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $P_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,

所以 $P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,所以数列

$\{P_n\}$ 的通项公式为 $P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

(3)【证明】 $P_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{11}{32}$,故 $b_n = \frac{-8n^2 + 18n - 1}{9^n}$.

$\frac{32}{11} \times \frac{11}{32} = \frac{-8n^2 + 18n - 1}{9^n} = \frac{n^2 - 1}{9^n} - \frac{(n-1)^2 - 1}{9^{n-1}}$,

故 $S_n = \left[\frac{1^2 - 1}{9^1} - \frac{(1-1)^2 - 1}{9^0} \right] + \left(\frac{2^2 - 1}{9^2} - \frac{1^2 - 1}{9^1} \right) + \left(\frac{3^2 - 1}{9^3} - \frac{2^2 - 1}{9^2} \right) + \dots + \left[\frac{n^2 - 1}{9^n} - \frac{(n-1)^2 - 1}{9^{n-1}} \right] = \frac{n^2 - 1}{9^n} + 1$,

所以 $S_m - 1 = \frac{m^2 - 1}{9^m} < \frac{m^2}{9^m}$,故 $\sqrt{S_m - 1} < \frac{m}{3^m}$.

记 $c_n = \frac{n}{3^n}$,其前 n 项和为 K_n ,

所以 $K_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$,

$\frac{1}{3}K_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}$,

两式相减可得 $\frac{2}{3}K_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot$

$1 - \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$,

$1 - \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$,

所以 $K_n = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \times \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{3}{2} \times \frac{n}{3^{n+1}} =$

$\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right) \frac{1}{3^n} < \frac{3}{4}$,

因此 $T_n = \sum_{m=1}^n \sqrt{S_m - 1} < \sum_{m=1}^n c_m = K_n < \frac{3}{4}$,得证.



真题风向练

15. ACD 命题点 ① 等比数列的通项公式、前 n 项和公式

【解析】对于选项 A, 由题意, 得 $2a_1q^2 = a_1 + a_1q$, 即 $2q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = -\frac{1}{2}$ 或 $q = 1$ (舍去), 故 A 正确;

对于选项 B, $S_n = \frac{a_1 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$, $a_1 >$

0, 当 n 为偶数时, $1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n < 1$, $S_n < \frac{2a_1}{3}$, 故 B 错误 (快解:

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2}a_1 < \frac{2}{3}a_1$);

对于选项 C, $2S_{n+2} = \frac{4a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+2} \right]$, $S_{n+1} + S_n = \frac{2a_1}{3} \cdot$

$\left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] + \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] = \frac{2a_1}{3} \left[2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] =$

$\frac{4a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+2} \right]$ (快解: $2S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = (S_{n+2} - S_{n+1}) +$

$(S_{n+2} - S_n) = 2a_{n+2} + a_{n+1} = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) a_{n+1} + a_{n+1} = 0$), 即 $2S_{n+2} =$

$S_{n+1} + S_n$, 故 C 正确;

对于选项 D, $\sum_{k=1}^n S_k = \frac{2a_1}{3} \left[n - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right] = \frac{2na_1}{3} + \frac{2a_1}{9} \cdot$

$\left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right]$, 因为 $1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n > 0$ (提示: 当 n 为奇数时,

$1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n > 0$; 当 n 为偶数时, $1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 1 -$

$\left(\frac{1}{2} \right)^n > 0$), 所以 $\sum_{k=1}^n S_k > \frac{2na_1}{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

专题 1 数列求通项



题型上分练

1. B 【解析】因为 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, $a_{n+1} = 2S_n + 4$, 所以 $S_{n+1} - S_n = 2S_n + 4$, 即 $S_{n+1} = 3S_n + 4$, 所以 $S_{n+1} + 2 = 3(S_n + 2)$, 又 $S_1 + 2 = a_1 + 2 = 4$, 所以数列 $\{S_n + 2\}$ 是以 4 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $S_5 + 2 = 4 \times 3^{5-1}$, 即 $S_5 = 322$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $S_1 = a_1 = 2a_1 - 1$, 所以 $a_1 = 1$. 当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = a_n = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1)$, 所以 $a_n = 2a_{n-1}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 所以

$b_n = \log_2 2^n = n$, 则 $\sum_{i=2}^{10} b_i = 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = \frac{9 \times (2 + 10)}{2} = 54$.

3. C 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n + 3 = 2a_n + n$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} + 3 = 2a_{n-1} + n - 1$, 两式相减得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2)$, 即 $a_n = 2a_{n-1} - 1 (n \geq 2)$, 则 $a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1) (n \geq 2)$, 而 $S_1 + 3 = 2a_1 +$



1, 解得 $a_1 = 2$, 因此数列 $\{a_n - 1\}$ 是以 $a_1 - 1 = 1$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 则 $a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 即 $a_n = 2^{n-1} + 1$, 于是 $S_n = 2^n + n - 1$, 所以 $S_{10} = 2^{10} + 10 - 1 = 1\,033$. 故选 C.

4. D 【解析】因为 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 所以 $a_{n+1} = \frac{T_{n+1}}{T_n}$,

则由 $\frac{a_{n+1}}{T_{n+1}} - \frac{a_n}{T_n} = 2$, 可得当 $n \geq 2$ 时, $\frac{\frac{T_{n+1}}{T_n}}{T_{n+1}} - \frac{\frac{T_n}{T_{n-1}}}{T_n} = \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} = 2$. 当

$n = 1$ 时, $T_1 = a_1$, 故 $\frac{a_2}{a_1 a_2} - 1 = 2$, 即 $a_1 = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{a_1} = 3$, 所以

数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $\frac{1}{T_n} = 3 +$

$2(n-1) = 2n+1$, 所以 $T_n = \frac{1}{2n+1}$, 故 $a_{2\,025} = \frac{T_{2\,025}}{T_{2\,024}} = \frac{\frac{1}{2 \times 2\,025 + 1}}{\frac{1}{2 \times 2\,024 + 1}} =$

$\frac{4\,049}{4\,051}$. 故选 D.

5. C 【解析】由题意知 $a_n > 0$, 且 $S_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2a_1}$, 可得 $S_1 = a_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{2} + \frac{1}{2(S_n - S_{n-1})}$, 整理可得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$,

所以数列 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $S_n^2 = n$, 则 $S_n = \sqrt{n}$.

对于 A, $a_2 = S_2 - S_1 = \sqrt{2} - 1 < a_1$, 故 A 错误;

对于 B, $S_n^2 = n$, 故 $\{S_n\}$ 是等差数列, 故 B 错误;

对于 C, $S_n \cdot S_{n+2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2} < \frac{n+n+2}{2} = n+1 = S_{n+1}^2$, 故 C 正确;

对于 D, $2S_{n+1} = 2\sqrt{n+1} = \sqrt{4n+4}$, $S_n + S_{n+2} = \sqrt{n} + \sqrt{n+2} = \sqrt{(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})^2} = \sqrt{2n+2+2\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2}} < \sqrt{2n+2+(n+n+2)} = \sqrt{4n+4}$, 故 D 错误. 故选 C.

6. 2n 【解析】设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), 由 $b_5 = 8b_2$, 得 $q^3 = 8$, 解得 $q = 2$.

又 $b_1 = -1$, 所以 $b_n = -2^{n-1}$, 所以 $T_n = \frac{-1 \times (1-2^n)}{1-2} = 1-2^n$.

代入 $(1-2^n)S_n = n(n+1)T_n$, 解得 $S_n = n(n+1)$.

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$,

当 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n = 2n$,

$a_1 = 2$ 也满足上式, 所以 $a_n = 2n$, $n \in \mathbf{N}^*$.



7. (1) 【解】当 $n=1$ 时, $a_1+S_1=2a_1=2, \therefore a_1=1$,

当 $n \geq 2$ 时, $\therefore a_n+S_n=2, \therefore a_{n-1}+S_{n-1}=2$,

两式相减得 $2a_n-a_{n-1}=0$, 即 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $\therefore a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} b_1+4d+b_1+5d=20, \\ 4(b_1+2d)=20, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b_1=1, \\ d=2, \end{cases} \therefore b_n=2n-1$.

(2) 【证明】由 (1) 可得 $S_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}, a_n b_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$$T_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}T_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-$$

$$\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n} \text{ (提示: 错位相减法),}$$

$$\therefore T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}, \therefore T_n-3S_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}-3\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=-\frac{2n}{2^{n-1}}<0,$$

$$\therefore T_n<3S_n.$$

8. (1) 【证明】当 $n \geq 2$ 时, $S_n^2=a_n(S_n-1)$, 则 $S_n^2=(S_n-S_{n-1})(S_n-1)$,

整理得 $S_{n-1}-S_n=S_{n-1}S_n$, 易知 $S_{n-1}S_n \neq 0$, 则 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=1$, 又

$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

(2) 【解】由 (1) 可得 $\frac{1}{S_n}=1+n-1=n$, 即 $S_n=\frac{1}{n}$,

$$\text{则 } b_n=[\lg n]+\left[\lg \frac{1}{n}\right]=[\lg n]+[-\lg n],$$

当 $n=10^k (k \in \mathbf{N})$ 时, $\lg n=k$, 即 $[\lg n]=k, [-\lg n]=-k$, 所以 $b_n=[\lg n]+[-\lg n]=k+(-k)=0$;

当 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \neq 10^k (k \in \mathbf{N})$ 时, $\lg n$ 不是整数, 可设 $\lg n \in (m, m+1), m \in \mathbf{Z}$, 则 $-\lg n \in (-m-1, -m)$,

则 $[\lg n]=m, [-\lg n]=-m-1$, 可得 $b_n=[\lg n]+[-\lg n]=m+(-m-1)=-1$.

综上所述, $b_n=\begin{cases} 0, n=10^k, k \in \mathbf{N}, \\ -1, n \neq 10^k, k \in \mathbf{N}, \end{cases} n \in \mathbf{N}^*.$



当 $1 \leq n \leq 2\,025$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, $b_1 = b_{10} = b_{100} = b_{1\,000} = 0$, $b_n = -1$ ($n \neq 1, 10, 100, 1\,000$), 所以 $T_{2\,025} = 0 \times 4 + (-1) \times 2\,021 = -2\,021$.

9. (1) 【证明】当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$,

即 $(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}$, 又 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} > 0$, 所以 $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1$, 又 $\sqrt{S_1} = 1$, 所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

(2) 【解】由 (1) 可得 $\sqrt{S_n} = 1 + n - 1 = n$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = n + n - 1 = 2n - 1$, 又 $a_1 = 1$ 也满足 $a_n = 2n - 1$, 故 $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

(3) 【解】由 $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq t \sqrt{2n+1}$ ($t > 0, n \in \mathbf{N}^*$), 可得 $t \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$.

令 $b_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$, 则 $b_n > 0$,

$$\text{则 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+3}} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} = \sqrt{\frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3}} > 1, \text{ 即 } b_{n+1} > b_n,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 则 $0 < t \leq b_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 t 的取值范围是 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

10. A 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 即

$$a_{n+1} - a_n = \lg \frac{n+1}{n} = \lg(n+1) - \lg n.$$

$$\text{所以 } a_{100} = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$$

$$= 3 + \lg 2 - \lg 1 + \lg 3 - \lg 2 + \cdots + \lg 100 - \lg 99$$

$$= 3 - \lg 1 + \lg 100 = 3 + 2 = 5. \text{ 故选 A.}$$

11. C 【解析】因为 $a_{2n+2} = a_{2n+1} - \frac{1}{n+1} = a_{2n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

$$\text{所以 } a_{2\,024} = a_{2\,022} + \frac{1}{1\,011} - \frac{1}{1\,012},$$

$$a_{2\,022} = a_{2\,020} + \frac{1}{1\,010} - \frac{1}{1\,011},$$

$$a_{2\,020} = a_{2\,018} + \frac{1}{1\,009} - \frac{1}{1\,010},$$



...

$$a_4 = a_2 + 1 - \frac{1}{2}.$$

累加得 $a_{2024} = a_2 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1011} - \frac{1}{1012}\right) = 0 + 1 - \frac{1}{1012} = \frac{1011}{1012}$. 故选 C.

12. 【解】(1) 由题意得当 $n \geq 2$ 时, 有 $S_{n+1} - S_n = 2(S_n - S_{n-1})$, 即

$$a_{n+1} = 2a_n.$$

又 $a_2 = 2a_1$, 所以 $a_{n+1} = 2a_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立,

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 从而 $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 由 $b_{n+1} = a_n + b_n$, 可得 $b_n - b_{n-1} = a_{n-1} (n \geq 2)$,

$$\text{则 } b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})$$

$$= b_1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$= 3 + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2}$$

$$= 3 + \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1} + 2 (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时, $b_1=3$ 符合上式, 故 $b_n = 2^{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$$

$$= (2^0 + 2) + (2^1 + 2) + \cdots + (2^{n-2} + 2) + (2^{n-1} + 2)$$

$$= (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) + 2n$$

$$= \frac{1-2^n}{1-2} + 2n = 2^n + 2n - 1.$$

13. 【解】(1) 由题意得 $S_n = \frac{3a_n}{2} - 1$, 则 $S_{n-1} = \frac{3a_{n-1}}{2} - 1 (n \geq 2)$,

$$\text{则 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3a_n}{2} - 1 - \left(\frac{3a_{n-1}}{2} - 1\right) (n \geq 2), \text{ 整理得 } a_n = 3a_{n-1}$$

($n \geq 2$),

$$S_1 = a_1 = \frac{3a_1}{2} - 1, \text{ 解得 } a_1 = 2,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列,

$$\text{则 } a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

(2) 因为 $a_n = b_n + b_{n+1}$, 所以 $a_{n+1} = b_{n+1} + b_{n+2}$,

两式相减得 $b_{n+1} + b_{n+2} - (b_n + b_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$, 即 $b_{n+2} - b_n = a_{n+1} - a_n$

$= 4 \times 3^{n-1}$, 易知 $\{b_{n+2} - b_n\}$ 是以 4 为首项, 3 为公比的等比数列.

$$b_3 - b_1 = 4 \times 3^0, b_5 - b_3 = 4 \times 3^2, \cdots, b_{15} - b_{13} = 4 \times 3^{12},$$

将以上各式相加, 可得 $b_{15} - b_1 = 4 \times 3^0 + 4 \times 3^2 + \cdots + 4 \times 3^{12} =$

$$\frac{4 \times (1-9^7)}{1-9} = \frac{9^7-1}{2}, \text{ 又 } b_1 = 1, \text{ 故 } b_{15} = \frac{9^7-1}{2} + 1 = \frac{9^7+1}{2}.$$

14. C 【解析】当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot$



$$\frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{n(n+1)},$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也符合该式, 所以 $a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$,

则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 $2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{7} \right) = \frac{12}{7}$. 故选 C.

15.38 【解析】依题意, 当 $n=4$ 时, $2S_4 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4a_4$, 又 $a_4=6$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 = 6$ ①,

当 $n=3$ 时, $2S_3 = 2(a_1 + a_2 + a_3) = 3a_3$, 即 $2a_1 + 2a_2 = a_3$ ②,

当 $n=2$ 时, $2S_2 = 2(a_1 + a_2) = 2a_2$, 即 $a_1 = 0$ ③,

由①②③得 $a_2=2, a_3=4$.

因为 $2S_n = na_n$, 所以当 $n \geq 3$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$, 则 $2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}$, 可得 $a_{20} = \frac{a_{20}}{a_{19}} \times$

$$\frac{a_{19}}{a_{18}} \times \frac{a_{18}}{a_{17}} \times \cdots \times \frac{a_3}{a_2} \times a_2 = \frac{19}{18} \times \frac{18}{17} \times \frac{17}{16} \times \cdots \times \frac{2}{1} \times 2 = 38.$$

16. 【解】(1) 由 $3(2n-1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0, a_1 = \frac{1}{3}$, 可得 $a_n \neq$

$$0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3(2n-1)},$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \times$

$$\left(\frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2n-5} \times \frac{2n-1}{2n-3} \right) = (2n-1) \left(\frac{1}{3} \right)^n,$$

又因为 $a_1 = \frac{1}{3}$ 也符合上式, 所以 $a_n = (2n-1) \left(\frac{1}{3} \right)^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) S_n = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \cdots + (2n-1) \left(\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{①},$$

$$\text{则 } \frac{1}{3} S_n = 1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3} \right)^3 + 5 \times \left(\frac{1}{3} \right)^4 + \cdots + (2n-1) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \quad \text{②},$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ 得 } \frac{2}{3} S_n = \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^4 + \cdots + 2 \times$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^n - (2n-1) \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{9} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{3}} - (2n-1) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} = \frac{2}{3} - (2n+2) \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = 1 - (n+1) \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$



17. (1) 【解】因为数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 各项均不为 0, 且 $a_{n+1}b_n -$

$$a_nb_{n+2}=0, \text{ 所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+2}}{b_n}.$$

因为 $\{b_n\}$ 是公比为 $\sqrt{3}$ 的等比数列, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+2}}{b_n} = 3$, 又因

为 $a_1=1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列,

$$\text{所以 } S_n = \frac{1 \times (1-3^n)}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n-1).$$

(2) 【证明】因为 $b_1=1$, 且 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 所以

$$b_n=2n-1, \text{ 则 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{2n+3}{2n-1} \text{ (提示: 后一项比前一项是含 } n$$

的式子, 可考虑累乘法),

$$\text{当 } n \geq 2, \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n-3}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{2n-1}{2n-5}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{2n-3}{2n-7},$$

$$\dots, \frac{a_4}{a_3} = \frac{9}{5}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{7}{3}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{1}, \text{ 所以 } \frac{a_n}{a_1} = \frac{(2n+1)(2n-1)}{3 \times 1}.$$

所以 $a_n = \frac{1}{3} \times (4n^2-1) (n \geq 2)$, 因为 $a_1=1$ 符合上式, 所以

$$a_n = \frac{1}{3} \times (4n^2-1) (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 所以 } \frac{1}{a_n} = \frac{3}{4n^2-1} =$$

$$\frac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \text{ (提示: 裂项相消法),}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } \frac{1}{2n+1} > 0, \text{ 所以 } T_n < \frac{3}{2}.$$

18. C 【解析】由 $a_n = \frac{1}{2}S_n + \frac{3}{2}$, 得 $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}S_n + \frac{3}{2} (n \geq 2)$,

整理得 $S_n + 3 = 2(S_{n-1} + 3) (n \geq 2)$.

由 $a_1 = \frac{1}{2}S_1 + \frac{3}{2}$, 得 $S_1 = a_1 = 3$, 所以数列 $\{S_n + 3\}$ 是以 6 为首

项, 2 为公比的等比数列,

所以 $S_n + 3 = 6 \times 2^{n-1}$, 即 $S_n = 3 \times 2^n - 3$, 所以 $S_4 = 3 \times 2^4 - 3 = 45$.

故选 C.

19. BCD 【解析】因为 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$, 所以 $a_{n+1} - a_n =$

$2(a_n - a_{n-1})$, 又 $a_2 - a_1 = 2$, 所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故 A 错误;

由 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$, 得 $a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2)$, 又 $a_2 - 2a_1 = 1$, 所以数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 1 的等比数列, 故 B 正确;

由上述分析可知, $a_{n+1} - a_n = 2^n$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_1 + (a_2 -$



$$a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1, \text{ 又 } a_1 = 1 \text{ 符合上式, 故 } a_n = 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^*),$$

故 C 正确;

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n = \frac{2 \times (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2, \text{ 故 D 正}$$

确. 故选 BCD.

20. ABD 【解析】依题意 $a_1 = \frac{1}{5}, a_2 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times 0 = \frac{4}{25}$, 若第

n 次传球之后球在乙手中, 则当 $n \geq 2$ 时, 第 $(n-1)$ 次传球之后球不在乙手中, 其概率为 $1 - a_{n-1}$, 第 n 次传球有 $\frac{1}{5}$ 的可能

传给乙, 因此 $a_n = \frac{1}{5}(1 - a_{n-1}) (n \geq 2)$.

于是 $a_n - \frac{1}{6} = -\frac{1}{5}\left(a_{n-1} - \frac{1}{6}\right) (n \geq 2)$, 而 $a_1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$, 则

$\left\{a_n - \frac{1}{6}\right\}$ 是以 $\frac{1}{30}$ 为首项, $-\frac{1}{5}$ 为公比的等比数列,

所以 $a_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, 则 $a_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} =$

$\frac{1}{6} \left[1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]$, 故 A, B, D 正确.

由题易知 $b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{5}$, 当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{1}{5}(1 - b_{n-1})$, 则 $b_n -$

关键点

$\frac{1}{6} = -\frac{1}{5}\left(b_{n-1} - \frac{1}{6}\right) (n \geq 2)$, 又 $b_1 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$, 所以

$\left\{b_n - \frac{1}{6}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{6}$ 为首项, $-\frac{1}{5}$ 为公比的等比数列, 所以

$b_n - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, 所以 $b_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

因为 $a_{10} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^9 = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} \times \left(\frac{1}{5}\right)^9, b_{10} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \times$

$\left(-\frac{1}{5}\right)^9 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{5}\right)^9$, 所以 $a_{10} - b_{10} = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} \times \left(\frac{1}{5}\right)^9 -$

$\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{5}\right)^9\right] = -\frac{1}{30} \times \left(\frac{1}{5}\right)^9 - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{5}\right)^9 < 0$, 所以

$a_{10} < b_{10}$, 故 C 错误. 故选 ABD.

21. $\frac{1}{2}n(n+3)$ 【解析】由 $\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{a_n}{a_n-1}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1} = 1$,

$\therefore \left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1-1} = 1$, 公差为 1 的等差数列, $\therefore \frac{1}{a_n-1} =$

$1 + (n-1) \cdot 1 = n, \therefore a_n = \frac{n+1}{n}$.

$\therefore b_n = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1, \therefore \{b_n\}$ 是首项为 2, 公差



为 1 的等差数列, $\therefore S_n = \frac{1}{2}n(n+3)$.

22. $a_n = \frac{1}{n!}$ 【解析】易知 $a_n \neq 0$, 由 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n + a_{n+1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 得

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}, \text{ 即 } \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1, \text{ 因为 } a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2},$$

所以 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, 故数列 $\left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\}$ 是以 2 为首项, 1 为公差的等

差数列, 即 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 + (n-1) = n+1$,

则当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_{n-1}}{a_n} = n, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = n-1, \dots, \frac{a_1}{a_2} = 2$, 故 $\frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \times \dots \times$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_n} = n!$, 即 $a_n = \frac{a_1}{n!} = \frac{1}{n!}$ ($n \geq 2$), 当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 满足

上式, 则 $a_n = \frac{1}{n!}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

23. (1) 【解】方法一 (利用指数形式的构造法求通项): 因为

$a_{n+1} = a_n + 2^n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$. 令

$c_n = \frac{a_n}{2^n}$, 则 $c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot c_n + \frac{1}{2}$, 即 $c_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(c_n - 1)$, 所以

$\{c_n - 1\}$ 是首项为 $c_1 - 1 = \frac{a_1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

则 $c_n - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 即 $\frac{a_n}{2^n} - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以 $a_n = 2^n - 1$.

方法二 (符合 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 的形式, 利用累加法求通项): 因

为 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}, \dots, a_3 = a_2 + 2^2, a_2 = a_1 + 2$, 上述

各式累加得 $a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} =$

$2^n - 1$ ($n \geq 2$), 又 $a_1 = 1$ 满足上式, 故 $a_n = 2^n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(2) 【证明】由 (1) 得 $a_n = 2^n - 1$, 所以 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}} =$

$$\frac{2^n - 1 + 1}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1},$$

所以 $S_n = \frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} = 1 -$

$\frac{1}{2^{n+1} - 1} < 1$, 即 $S_n < 1$.

真题风向练

24. 命题点 ① 由递推公式求通项公式、数列的增减性

(1) 【证明】易知 $a_n \neq 0$, 由 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{3a_n} = \frac{2}{3} \cdot$



$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$ (提示:分式形式的递推公式,往往考虑取倒数法求

通项公式), 则 $1 - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)$, 所以数

列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $1 - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.

..... 5 分

(2) 【解】由(1)得 $1 - \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

则 $a_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3^n}{3^n - 2^n}$ 9 分

(3) 【证明】 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}} \cdot \frac{3^n - 2^n}{3^n} = \frac{3 \cdot (3^n - 2^n)}{3^{n+1} - 2^{n+1}} =$

$\frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 3}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2} = \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2 - 1}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2} = 1 - \frac{1}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2}$ 12 分

令 $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2, x \in [1, +\infty)$,

因为 $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x) \geq$

$f(1) = 3 \times \frac{3}{2} - 2 = \frac{5}{2} > 0$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2}\right\}$ 为递减数列,

从而数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 且 $b_n < 1$,

故 $b_n < b_{n+1} < 1$ 15 分

专题 2 数列求和



题型上分练

1. B 【解析】观察题干数列, 存在“ $\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$ ”的结构, 考虑

倒序相加法求和, 再看题中函数, 计算出 $f(x) + f(1-x)$ 的值进行求解.

由 $f(x) = (x^2 - x) \sin(2x - 1) + 1$, 得 $f(x) + f(1-x) = (x^2 - x) \cdot \sin(2x - 1) + 1 + [(1-x)^2 - (1-x)] \sin(1 - 2x) + 1 = (x^2 - x) \sin(2x - 1) - (x^2 - x) \sin(2x - 1) + 2 = 2$. 易知 $f(1) = 1$,

由题可知 $a_{2026} = f\left(\frac{1}{2026}\right) + f\left(\frac{2}{2026}\right) + \cdots + f\left(\frac{2025}{2026}\right) + f(1)$,

则 $a_{2026} = f(1) + f\left(\frac{2025}{2026}\right) + f\left(\frac{2024}{2026}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2026}\right)$,

两式相加得 $2a_{2026} = \left[f\left(\frac{1}{2026}\right) + f\left(\frac{2025}{2026}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2026}\right) + \right.$



$$f\left(\frac{2\ 024}{2\ 026}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{2\ 025}{2\ 026}\right) + f\left(\frac{1}{2\ 026}\right)\right] + 2f(1) =$$

$$\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{2\ 026\uparrow} = 4\ 052, \text{解得 } a_{2\ 026} = 2\ 026.$$

2. 【解】(1) 当 $n=1$ 时, $a_1=2$;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = n, \text{①}$$

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = n-1, \text{②}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{得 } \frac{a_n}{2^n} = 1, \therefore a_n = 2^n, \text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1=2, \text{符合该式,}$$

$$\therefore a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(2) \because b_n = \frac{1}{2^n + 2^{50}},$$

$$\therefore b_n + b_{100-n} = \frac{1}{2^n + 2^{50}} + \frac{1}{2^{100-n} + 2^{50}} = \frac{1}{2^n + 2^{50}} + \frac{2^n}{2^{100} + 2^{50} \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n + 2^{50}} +$$

$$\frac{2^n}{(2^n + 2^{50}) 2^{50}} = \frac{2^{50} + 2^n}{(2^n + 2^{50}) 2^{50}} = \frac{1}{2^{50}}.$$

$$\therefore b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{99} = \frac{1}{2^1 + 2^{50}} + \frac{1}{2^2 + 2^{50}} + \cdots + \frac{1}{2^{99} + 2^{50}}, \text{③}$$

$$b_{99} + b_{98} + b_{97} + \cdots + b_2 + b_1 = \frac{1}{2^{99} + 2^{50}} + \frac{1}{2^{98} + 2^{50}} + \cdots + \frac{1}{2^1 + 2^{50}}, \text{④}$$

$$\therefore \text{③}+\text{④} \text{得 } 2(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{99}) = \frac{99}{2^{50}}.$$

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_{99} = \frac{99}{2^{51}}.$$

3. 【解】(1) 因为点 $(n, S_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 均在函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$$\text{的图象上, 所以 } S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \left[\frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) \right] = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \left(\frac{1}{2}n^2 - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right) = n,$$

因为 $a_1=1$ 满足上式, 所以 $a_n=n (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \text{ 因为 } g(x) = \frac{4^x}{4^x + 2},$$

$$\text{所以 } g(x) + g(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4}{4 + 2 \times 4^x} = \frac{4^x}{4^x + 2} +$$

$$\frac{2}{4^x + 2} = 1.$$

$$\text{因为 } a_n = n, \text{ 所以 } b_n = g\left(\frac{a_n}{2\ 025}\right) = g\left(\frac{n}{2\ 025}\right) (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{所以 } T_{2\ 024} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2\ 023} + b_{2\ 024} = g\left(\frac{1}{2\ 025}\right) + g\left(\frac{2}{2\ 025}\right) +$$



$$g\left(\frac{3}{2\ 025}\right) + \cdots + g\left(\frac{2\ 023}{2\ 025}\right) + g\left(\frac{2\ 024}{2\ 025}\right), \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } T_{2\ 024} &= b_{2\ 024} + b_{2\ 023} + b_{2\ 022} + \cdots + b_2 + b_1 = g\left(\frac{2\ 024}{2\ 025}\right) + g\left(\frac{2\ 023}{2\ 025}\right) + \\ &g\left(\frac{2\ 022}{2\ 025}\right) + \cdots + g\left(\frac{2}{2\ 025}\right) + g\left(\frac{1}{2\ 025}\right), \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } 2T_{2\ 024} = 2\ 024 \left[g\left(\frac{1}{2\ 025}\right) + g\left(\frac{2\ 024}{2\ 025}\right) \right] = 2\ 024,$$

所以 $T_{2\ 024} = 1\ 012$.

4. C 【解析】 $a_n = \log_2 \frac{3n-1}{3n+2} = \log_2(3n-1) - \log_2(3n+2)$ (提示: 对数型裂项相消),

$$\text{故 } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \log_2 2 - \log_2 5 + \log_2 5 - \log_2 8 + \cdots + \log_2(3n-1) - \log_2(3n+2) = 1 - \log_2(3n+2).$$

$$\begin{aligned} \text{令 } S_n < -\frac{11}{3}, \text{ 整理得 } \log_2(3n+2) > \frac{14}{3}, \text{ 则 } 3n+2 > 2^{\frac{14}{3}} &= 16 \times 2^{\frac{2}{3}} = \\ 16 \times \sqrt[3]{4} \approx 16 \times 1.59 = 25.44, \text{ 解得 } n \geqslant 8 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以使 } S_n < &-\frac{11}{3} \text{ 成立的 } n \text{ 的最小值为 } 8. \text{ 故选 C.} \end{aligned}$$

5. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $\begin{cases} a_4 + a_5 = 24, \\ S_6 = 48, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 4d = 24, \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 48, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = -2, \\ d = 4, \end{cases} \text{ 所以 } a_n = 4n - 6.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{1}{(4n-2) \cdot (4n+2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{所以数列 } \left\{ \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} \right\} \text{ 的前 } 2\ 024 \text{ 项和为 } &\frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \right. \\ \left. \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4\ 047} - \frac{1}{4\ 049} \right) &= \frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{1}{4\ 049} \right) = \frac{506}{4\ 049}. \text{ 故} \\ \text{选 C.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6. C} \text{ 【解析】 } b_n &= \frac{2(a_n + a_{n+1})}{(a_n a_{n+1})^2} = \frac{2(2n-1) + 2(2n+1)}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \\ &\frac{8n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } T_n &= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 - \\ &\frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ 由 } S_n = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2, T_k S_{2k+1} = 120, \text{ 得} \end{aligned}$$

$$\left[1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right] (2k+1)^2 = 120, \text{ 整理得 } 4k(k+1) = 120, \text{ 化简得}$$

$$k^2 + k - 30 = 0, \text{ 解得 } k = 5 \text{ (负值舍去)}. \text{ 故选 C.}$$

7. A 【解析】 $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6 (n \in \mathbf{N}^*),$

①



当 $n=1$ 时, $a_1=2 \times 3^2-6=12$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n-1}a_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 6$, ②

①-②得 $\frac{1}{n}a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6 - (2 \cdot 3^n - 6) = 4 \cdot 3^n$, 所以 $a_n = 4n \cdot$

3^n , 显然 a_1 也满足上式, 所以 $a_n = 4n \cdot 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以 $b_n = \frac{4n \cdot 3^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3^{n+1}}{2n+3} - \frac{3^n}{2n+1}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n

项和为 S_n ,

则 $S_{15} = \left(\frac{3^2}{5} - \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3^3}{7} - \frac{3^2}{5}\right) + \left(\frac{3^4}{9} - \frac{3^3}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{3^{16}}{33} - \frac{3^{15}}{31}\right) =$

$\frac{3^{16}}{33} - 1 = \frac{3^{15}}{11} - 1$. 故选 A.

8. D 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$, 显然 $a_1=1$ 满足上式, 所以 $a_n=2n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以 $b_n = (-1)^n \frac{n}{a_n a_{n+1}} = (-1)^n \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \cdot \frac{1}{4}$

关键点

$\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$.

当 n 为偶数时, $T_n = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$, 所以 $T_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n+1)} \leq -\frac{1}{5}$.

当 n 为奇数时, $T_n = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$, 所以 $T_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)} < -\frac{1}{4}$.

因为不等式 $T_n \leq \lambda (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立, 所以 $(T_n)_{\max} \leq \lambda$, 所以

$\lambda \geq -\frac{1}{5}$, 所以实数 λ 的最小值为 $-\frac{1}{5}$. 故选 D.

9. A 【解析】 $\because \frac{1}{c_n} = f(n) = n - \frac{1}{n} (n \geq 2), \therefore c_n = \frac{n}{n^2-1} =$

$\frac{n}{(n+1)(n-1)} (n \geq 2),$

$\therefore T_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \cdots \cdot c_n = 1 \times \frac{2}{3 \times 1} \times \frac{3}{4 \times 2} \times \cdots \times \frac{n-1}{n \times (n-2)} \times$

$\frac{n}{(n+1) \times (n-1)} = \frac{n}{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n+1)} = \frac{2n}{(n+1)!} = 2 \cdot \frac{n+1-1}{(n+1)!} =$

$2 \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] (n \geq 2),$



$$\therefore S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = 2 \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] =$$

$$2 - \frac{2}{(n+1)!} < 2 \quad (n \geq 2),$$

$$\because T_n > 0, \therefore \{S_n\} \text{ 为递增数列}, \because S_2 = 2 - \frac{2}{3!} = \frac{5}{3}, \therefore \text{当 } n \geq 2$$

$$\text{时}, \frac{5}{3} \leq S_n < 2. \text{ 故选 A.}$$

10. (1) 【解】因为 $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} +$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ 即 } \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n},$$

$$\text{可知数列 } \left\{ \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} \right\} \text{ 为常数列, 则 } \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} = a_1 + 1 = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = 2n - 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\text{对于 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2^n - 1, \text{ ①}$$

$$\text{若 } n=1, \text{ 则 } b_1 = 1;$$

$$\text{若 } n \geq 2, \text{ 则 } b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = 2^{n-1} - 1, \text{ ②}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ 得 } b_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

$$\text{又 } b_1 = 1 \text{ 符合上式, 所以 } b_n = 2^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(2) \text{ 【证明】由 (1) 可知 } \frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{2^{n-1}} = \frac{2n+1}{2^{n-2}} - \frac{2n+3}{2^{n-1}}, \text{ 可得 } S_n =$$

$$(6-5) + \left(5 - \frac{7}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{2n+1}{2^{n-2}} - \frac{2n+3}{2^{n-1}} \right) = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}, \text{ 显然}$$

$$\frac{2n+3}{2^{n-1}} > 0, \text{ 所以 } S_n < 6.$$

11. 【解】(1) 由 $na_n = S_n + 3n(n-1)$, 当 $n \geq 2$ 时, $n(S_n - S_{n-1}) = S_n +$

$$3n(n-1), \text{ 即 } (n-1)S_n - nS_{n-1} = 3n(n-1), \text{ 即 } \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = 3. \text{ 所以}$$

$$\text{数列 } \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 是首项为 } \frac{S_1}{1} = \frac{a_1}{1} = 1, \text{ 公差为 } 3 \text{ 的等差数列. 所以}$$

$$\frac{S_n}{n} = 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2, \text{ 故 } S_n = 3n^2 - 2n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } S_n = 3n^2 - 2n = n(3n-2), \text{ 所以 } na_n = n(3n-2) + 3n(n-1).$$

$$\text{因为 } n > 0, \text{ 所以 } a_n = 3n - 2 + 3(n-1) = 6n - 5.$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(6n-5)[6(n+1)-5]} = \frac{1}{(6n-5)(6n+1)} = \frac{1}{6}$$

$$\left[\frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n+1} \right],$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{6} \left[\left(1 - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n+1} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6n+1} \right) = \frac{n}{6n+1}.$$



所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n}{6n+1}$.

12. 【解】 (1) 当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1$, 即 $a_1 = 2a_1 - 1$, 所以 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$, 所以 $S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1)$, 即 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} = \frac{1}{2^{n-1}+1} -$

关键点

$$\frac{1}{2^n+1},$$

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n+1}$.

显然 $\{T_n\}$ 是递增数列, 且 $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$, 所以 $T_1 \leq T_n < \frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{6} \leq$

$$T_n < \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2\lambda - 1 \leq \frac{1}{6}, \\ \lambda \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{7}{12},$$

所以实数 λ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{12}\right]$.

13. D 【解析】 先根据条件求出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再利用构造法求出 $\{b_n\}$ 的通项公式, 最后根据错位相减法求出 S_n .

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_3 + a_5 = 2a_1 + 6d = 10$, $a_1 = 2$, 所以 $d = 1$, 所以 $a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n+1$, 则 $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n + 2^{n+1}$,

故 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{b_n}{2^n} + 1$, 又 $\frac{b_1}{2^1} = 1$, 所以 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

所以 $\frac{b_n}{2^n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 所以 $b_n = n \cdot 2^n$.

$$S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n, \text{ ①}$$

$$2S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n+1}, \text{ ②}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ 得 } -S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \times 2^{n+1} =$$

$$(1-n)2^{n+1} - 2,$$

所以 $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$, 故选 D.

14. (1) 【解】 当 $n=1$ 时, $a_1^2 - 2S_1 + a_1 = a_1^2 - a_1 = 0$, 解得 $a_1 = 0$ (舍) 或 $a_1 = 1$,

因为 $a_n^2 - 2S_n + a_n = 0$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1}^2 - 2S_{n-1} + a_{n-1} = 0$,

两式作差得 $a_n^2 - 2S_n + a_n - (a_{n-1}^2 - 2S_{n-1} + a_{n-1}) = 0$, 即 $a_n^2 - a_{n-1}^2 -$



$$a_n - a_{n-1} = 0, \text{ 故 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0,$$

又因为 $a_n > 0$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 1 (n \geq 2)$, 又 $a_1 = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $a_n = n$.

$$(2) \text{【证明】由 (1) 可知, } b_n = \frac{n}{3^n},$$

$$\text{故 } T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}},$$

$$\text{两式作差得 } \frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{n}{3^{n+1}}.$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{2n+3}{3^n} \right), \text{ 因为 } \frac{2n+3}{3^n} > 0, \text{ 所以 } T_n < \frac{3}{4}.$$

15. 【解】(1) 由题得 $a_n = 2^n + 2n$,

$$\text{则 } S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{2(1-2^n)}{1-2} + 2 \times$$

$$\frac{(1+n)n}{2} = 2^{n+1} - 2 + n^2 + n.$$

(2) 由 $f(x) = 2^x + 2x$ 可得 $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2$, 当 $x = n$ 时, $f'(n) = 2^n \ln 2 + 2$, 所以直线 l_n 的方程为 $y - 2^n - 2n = (2^n \ln 2 + 2)(x - n)$,

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y = 2^n + 2n - n(2^n \ln 2 + 2) = 2^n - n \cdot 2^n \ln 2,$$

$$\text{所以 } b_n = 2^n - n \cdot 2^n \ln 2.$$

设数列 $\{n \cdot 2^n\}$ 的前 n 项和为 Q_n ,

$$\text{则 } Q_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n,$$

$$2Q_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } -Q_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot$$

$$2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2, \text{ 故 } Q_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

易知数列 $\{2^n\}$ 的前 n 项和为 $2^{n+1} - 2$, 所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2^{n+1} - 2 - [(n-1)2^{n+1} + 2] \ln 2 = (1 + \ln 2 - n \cdot \ln 2) \cdot 2^{n+1} - 2 - 2 \ln 2$.

16. (1) 【证明】 $\because a_{n+1} - 2a_n = 3^n, \therefore a_{n+1} = 3^n + 2a_n$,

$$\because b_n = a_n - 3^n, \therefore b_{n+1} = a_{n+1} - 3^{n+1} = 3^n + 2a_n - 3 \times 3^n = 2a_n - 2 \times 3^n = 2(a_n - 3^n) = 2b_n,$$

$$\because a_1 = 5, \therefore b_1 = a_1 - 3^1 = 5 - 3 = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列.

$$(2) \text{【解】由 (1) 知, } b_n = 2^n, \text{ 则 } c_n = \frac{2n+1}{2^n},$$



$$\therefore S_n = \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2^n}, \textcircled{1}$$

$$\therefore \frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n+1}{2^{n+1}}, \textcircled{2}$$

$$\therefore \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 可得 } \frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n+1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore S_n = 5 - (2n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由 $(-1)^n \lambda < S_n + \frac{n}{2^{n-1}}$, 得 $(-1)^n \lambda < 5 - (2n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2^{n-1}}$, 化简得 $(-1)^n \lambda < 5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

当 n 为奇数时, 有 $-\lambda < 5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 即 $\lambda > 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 5$, 而 $\left[5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 5\right]_{\max} = 5 \times \frac{1}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$, $\therefore \lambda > -\frac{5}{2}$;

当 n 为偶数时, 有 $\lambda < 5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 5 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 而 $\left[5 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]_{\min} = 5 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$, $\therefore \lambda < \frac{15}{4}$.

综上, 实数 λ 的取值范围为 $\left(-\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

17. (1) 【解】由题意知当 $p=1$ 时, $b_n = a_n + a_{n+1}$, 又因为 $b_n = 2n$, 所以 $a_n + a_{n+1} = 2n$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1} + a_n = 2n-2$,

两式相减得 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$, 所以 $a_{100} - a_{10} = (a_{100} - a_{98}) + (a_{98} - a_{96}) + \cdots + (a_{12} - a_{10}) = 45 \times 2 = 90$.

(2) 【解】当 $p=2$ 时, $b_n = a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$, 又因为 $a_n = n$, 所以 $b_n = n + 2(n+1) + n + 2 = 4n + 4$, 所以 $\frac{b_n}{2^n} = \frac{4n+4}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n-2}}$.

设 $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_n = \frac{2}{2^{-1}} + \frac{3}{2^0} + \frac{4}{2^1} + \cdots + \frac{n}{2^{n-3}} +$

$$\frac{n+1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2}S_n = \frac{2}{2^0} + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-2}} + \frac{n+1}{2^{n-1}},$$

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n = 4 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n+1}{2^{n-1}} = 4 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} -$

$$\frac{n+1}{2^{n-1}} = 6 - \frac{n+3}{2^{n-1}}, \text{ 所以 } S_n = 12 - \frac{n+3}{2^{n-2}}.$$

(3) 【证明】根据题意有 $b_n = 2^n + p \cdot 2^{n+1} + (p-1) \cdot 2^{n+2} + \cdots + 2 \times 2^{n+p-1} + 2^{n+p}$,

$$b_{n+1} = 2^{n+1} + p \cdot 2^{n+2} + (p-1) \cdot 2^{n+3} + \cdots + 2 \times 2^{n+p} + 2^{n+p+1},$$

所以 $b_{n+1} - b_n = -2^n + (1-p) \cdot 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + \cdots + 2^{n+p} + 2^{n+p+1} =$



$$-2^n + (1-p) \cdot 2^{n+1} + \frac{2^{n+2}(1-2^p)}{1-2} = 2^{n+p+2} - 2^n(2p+3),$$

$$\text{则 } \frac{b_{n+1}-b_n}{2^{n+p}} = 4 - \frac{2p+3}{2^p}.$$

$$\text{因为 } \frac{2p+3}{2^p} > 0, \text{ 所以 } \frac{b_{n+1}-b_n}{2^{n+p}} < 4.$$

$$\text{令 } c_p = \frac{b_{n+1}-b_n}{2^{p+n}}, \text{ 则 } c_{p+1}-c_p = \left(4 - \frac{2p+5}{2^{p+1}}\right) - \left(4 - \frac{2p+3}{2^p}\right) = \frac{2p+1}{2^{p+1}} >$$

$$0, \text{ 所以 } c_{p+1} > c_p, \text{ 所以 } c_p \geq c_1 = 4 - \frac{2 \times 1 + 3}{2^1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以 } \frac{3}{2} \leq \frac{b_{n+1}-b_n}{2^{n+p}} < 4.$$

- 18. A** 【解析】数列 $\{(-1)^n(2n)^2 - n\}$ 的前 100 项和为 $4(-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 99^2 + 100^2) - (1+2+\cdots+100)$
 $= 4[(2+1)(2-1) + (4+3)(4-3) + \cdots + (100+99)(100-99)] - (1+2+\cdots+100)$
 $= 4 \times (1+2+3+4+\cdots+99+100) - (1+2+\cdots+100)$
 $= 3 \times (1+2+3+4+\cdots+99+100)$
 $= 3 \times \frac{100 \times (1+100)}{2} = 15\,150$ (提示: 通项中含有 $(-1)^n$, 可考虑并项求和). 故选 A.

- 19. AD** 【解析】因为 $S_3 = 6$, 即 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$, 所以 $a_1 + 2a_1 + a_2 + 1 = 6$, 即 $a_1 + 2a_1 + 2a_1 + 1 = 6$, 解得 $a_1 = 1$, 故 A 正确.

当 n 为奇数时, $n+1$ 为偶数, $n+2$ 为奇数, 则 $a_{n+1} = 2a_n$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 1 = 2a_n + 1$, 所以 $a_{n+2} + 1 = 2(a_n + 1)$,

所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + 1 = 2$, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n + 1 = 2 \times 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}}$, 所以 $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1$, 所以 $a_{19} = 2^{\frac{19+1}{2}} - 1 = 2^{10} - 1 = 1\,023$, 故 B 错误.

当 n 为偶数时, $n+1$ 为奇数, $n+2$ 为偶数, 则 $a_{n+1} = a_n + 1$,

$a_{n+2} = 2a_{n+1} = 2(a_n + 1) = 2a_n + 2$, 所以 $a_{n+2} + 2 = 2(a_n + 2)$, 所以数列 $\{a_n + 2\}$ 是首项为 $a_2 + 2 = 2a_1 + 2 = 4$, 公比为 2 的等比数

列, 所以 $a_n + 2 = 4 \times 2^{\frac{n-2}{2}}$, 所以 $a_n = 4 \times 2^{\frac{n-2}{2}} - 2 = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2$, 所以当 n 为正整数时, $a_{2n} = 2^{n+1} - 2$, 故 C 错误.

$$S_{20} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

$$= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$= (2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \cdots + 2^{10} - 1) + (2^2 - 2 + 2^3 - 2 + \cdots + 2^{11} - 2)$$

$$= \frac{2 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} - 10 + \frac{2^2 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} - 20$$

$$= 2 \times (1\,024 - 1) - 10 + 4 \times (1\,024 - 1) - 20$$

$$= 6\,108, \text{ 故 D 正确. 故选 AD.}$$

- 20. 【解】**(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 由题得 $a_1 = 1, b_1 = 2$,

$$\text{因为 } \begin{cases} b_2 = a_2 + 2, \\ b_3 = 2a_3 + 2, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 2q = 1 + d + 2, \\ 2q^2 = 2(1 + 2d) + 2, \end{cases} \text{ 解得 } d = 1, q = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n, b_n = 2^n.$$



(2) 由(1)得 $c_n = \log_2 2^{2n-1} - 14 = 2n - 15$, 则 $|c_n| =$

$$\begin{cases} 15-2n, n \leq 7, \\ 2n-15, n \geq 8 \end{cases} \quad (\text{提示: 将通项去绝对值}).$$

$$\text{当 } n \leq 7 \text{ 时, } T_n = \frac{n(13+15-2n)}{2} = 14n - n^2;$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 8 \text{ 时, } T_n &= -c_1 - c_2 - \cdots - c_7 + c_8 + c_9 + \cdots + c_n \\ &= -2(c_1 + c_2 + \cdots + c_7) + (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \\ &= -2 \times \frac{7 \times (-13-1)}{2} + \frac{n(-13+2n-15)}{2} \\ &= n^2 - 14n + 98. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} 14n - n^2, n \leq 7, \\ n^2 - 14n + 98, n \geq 8. \end{cases}$$

21. 【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意得 $\begin{cases} a_1 q^2 = 8, \\ a_1 q = a_1 + 2, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 2, \end{cases} \text{ 所以 } a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

(2) 由(1)可得该数列为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{2}{2^5}, \frac{3}{2^6}, \frac{1}{2^7}, \dots$,

$$\begin{aligned} \text{则 } T_{3n} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-2}} \right) + \left(\frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^5} + \frac{2}{2^8} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{2^{3n-1}} \right) + \left(\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^9} + \cdots + \frac{3}{2^{3n}} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} \right) \times \frac{1 - \frac{1}{8^n}}{1 - \frac{1}{8}} = \\ &\quad \frac{11}{7} \left(1 - \frac{1}{8^n} \right). \end{aligned}$$

22. 【解】(1) 由 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, 得 $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

所以 $S_5 = 5a_3 = 15$, 所以 $a_3 = 3$. 因为 $b_4 = 2^{a_4-1} = 8$, 所以 $a_4 = 4$.

$$\text{设 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 则 } \begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 3, \\ a_4 = a_1 + 3d = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 1, \end{cases}$$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n$.

(2) 由(1)知 $a_n = n$, 所以 $b_n = \begin{cases} 2n+1, n \text{ 为奇数}, \\ 2^{n-1}, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$

$$S_{2n} = \frac{2n(a_1 + a_{2n})}{2} = \frac{2n(1+2n)}{2} = n(2n+1),$$

$$\begin{aligned} T_{2n} &= (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n}) \\ &= \frac{n(3+4n-1)}{2} + \frac{2(1-4^n)}{1-4} = n(2n+1) + \frac{2(4^n-1)}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{若 } T_{2n} - S_{2n} = \frac{2(4^n-1)}{3} < 2\,025, \text{ 则 } 2 \cdot 4^n < 6\,077.$$

设 $d_n = 2 \cdot 4^n$, 则数列 $\{d_n\}$ 是递增数列. 又 $d_5 = 2\,048 < 6\,077$, $d_6 = 8\,192 > 6\,077$, 所以 n 的最大值为 5.

真题风向练

23. 命题点 ⊙ 等差、等比数列基本量的求解, 集合与数列新定义



问题,并项求和法与错位相减法求和

【解】(1) 第一步: 设出数列基本量并列方程求解.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由} \begin{cases} a_2 = b_1 + b_2, \\ a_4 = b_3 - b_1, \end{cases} \text{得} \begin{cases} a_1 + d = b_1 + b_1 \cdot q, \\ a_1 + 3d = b_1 \cdot q^2 - b_1, \end{cases}$$

$$\text{将 } a_1 = 2, b_1 = 1 \text{ 代入得} \begin{cases} 2 + d = 1 + q, \\ 2 + 3d = q^2 - 1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} d = 2, \\ q = 3 \end{cases} \text{或}$$

$$\begin{cases} d = -1, \\ q = 0 \end{cases} \text{ (舍去).} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

第二步: 写出 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

$$\text{故 } a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n,$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 3^{n-1}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2)(i) **第一步: 先明确 E_n 表示的含义, $x \leq n, x = a_k$ 或 $x = b_k$, 即 x 为前 n 项中, a_n 中的项或 b_n 中的项.**

依题意, c_{3^n} 为集合 E_{3^n} 中元素的个数. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

第二步: 判断 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是否有公共项.

$a_n = 2n$, 则 a_n 中的项都为偶数; $b_n = 3^{n-1}$, 则 b_n 中的项都为奇数. 故数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 没有公共项 (注意: 一定要先判断是否有公共项, 因为集合中的元素具有互异性, 若有公共项, 则计算元素个数时, 只能计 1). $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

第三步: 分别计算两个数列对应的项数.

由 $a_k = 2k \leq 3^n$, 得 $k \leq \frac{3^n}{2}$, 因为 $k \in \mathbf{N}^*$, 且 3^n 为奇数, 所以

$$k = 1, 2, \dots, \frac{3^n - 1}{2}, \text{ 共有 } \frac{3^n - 1}{2} \text{ 项.}$$

由 $b_k = 3^{k-1} \leq 3^n$, 得 $k \leq n+1$, 所以 $k = 1, 2, \dots, n+1$, 共有 $(n+1)$ 项. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

第四步: 求 c_{3^n} .

$$\text{因为二者没有公共项, 所以 } c_{3^n} = \frac{3^n - 1}{2} + n + 1 = \frac{3^n}{2} + n + \frac{1}{2}.$$

$$\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(ii) **第一步: 将 E_m 拆成两个集合.**

设 $A_m = \{x | x \leq m, x = a_k, k \in \mathbf{N}^*\}$, $B_m = \{x | x \leq m, x = b_k, k \in \mathbf{N}^*\}$, c_m 表示两个集合元素个数之和. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

第二步: 求 c_m .

所以集合 A_m 中元素的个数为 $\left[\frac{m}{2} \right]$ (提示: 此式含义为不大于 $\frac{m}{2}$ 的最大整数), 故 $\sum_{m=1}^{3^n-1} (-1)^m (2m) \left[\frac{m}{2} \right] = 0 + 4 - 6 +$

$$16 - 20 + 36 - 42 + \dots + 2(3^n - 1) \cdot \frac{3^n - 1}{2} = 0 + (-2) + (-4) +$$

$$(-6) + \dots + (3^n - 1)^2 = - \left[\frac{3^n - 3}{2} \cdot 2 + \frac{\frac{3^n - 3}{2} \cdot \left(\frac{3^n - 3}{2} - 1 \right)}{2} \cdot 2 \right] +$$

$$(3^n - 1)^2 = - \left[3^n - 3 + \frac{3^n - 3}{2} \cdot \left(\frac{3^n - 3}{2} - 1 \right) \right] + (3^n - 1)^2 =$$

$$-\frac{1}{4}(3^n - 1)(3^n - 3) + (3^n - 1)^2. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$



集合 B_m 中元素的个数利用分层区间法, 划分为 $[1, 3^1-1]$, $[3^1, 3^2-1], \dots, [3^{n-1}, 3^n-1]$ 进行考虑, 当 $m \in [3^{k-1}, 3^k-1]$, $k \in \mathbf{N}^*$ 时, B_m 的元素个数为 k .

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{3^1-1} (-1)^m (2m) \cdot 1 + \sum_{m=3^1}^{3^2-1} (-1)^m (2m) \cdot 2 + \dots + \sum_{m=3^{n-1}}^{3^n-1} (-1)^m (2m) \cdot n \\ n = & \sum_{k=1}^n \sum_{m=3^{k-1}}^{3^k-1} (-1)^m (2m) \cdot k, \\ & \sum_{m=3^{k-1}}^{3^k-1} (-1)^m (2m) \cdot k = k [(-2 \cdot 3^{k-1}) + 2(3^{k-1}+1) - 2(3^{k-1}+2) \\ & + 2(3^{k-1}+3) - \dots + 2(3^k-1)] = 2k (-3^{k-1} + 3^{k-1} + 1 - 3^{k-1} - 2 + 3^{k-1} + 3 - \dots + 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} - 1) \\ & = 2k [(-3^{k-1} + 3^{k-1} - \dots - 3^{k-1} + 3^{k-1}) + (1 - 2 + 3 - \dots + 2 \cdot 3^{k-1} - 1)] \\ & = 2k \left[0 + \left(1 + \frac{2 \cdot 3^{k-1} - 1 - 1}{2} \right) \right] = 2k \cdot 3^{k-1} \text{ (提示: 此处将 } k \text{ 看成} \\ & \text{是一个不变量, 将 } m \text{ 看成变量进行求和, 利用并项求和法),} \\ & \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } T_n = & \sum_{k=1}^n 2k \cdot 3^{k-1}, T_n = 2 \cdot 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot n \cdot 3^{n-1} \\ 3T_n = & 2 \cdot 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot n \cdot 3^n, \text{ 两式作差得 } -2T_n = 2(1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - 2n \cdot 3^n \\ 3^n = & 3^n(1-2n) - 1, \text{ 故 } T_n = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2} \right) 3^n. \dots\dots\dots 14 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{综上, } \sum_{m=1}^{3^n-1} (-1)^m a_m c_m = & -\frac{1}{4} (3^n-1)(3^n-3) + (3^n-1)^2 + \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2} \right) 3^n. \dots\dots\dots 15 \text{ 分} \end{aligned}$$

专题3 数列中特殊问题的求解



题型上分练

1. B 【解析】因为 $a_1 = b_1 + 2 = 2$, 所以 $a_1 = 2, b_1 = 0$, 则 $a_n = 2^n$,

$$b_n = 2n - 2. \text{ 根据题意, } c_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ 为奇数,} \\ 2n - 2, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 20 项的和为 $2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{19} + 2(1 + 3 + 5 + \dots + 19) = \frac{2 \times (1 - 4^{10})}{1 - 4} + 2 \times \frac{10 \times (1 + 19)}{2} = \frac{598 + 2^{21}}{3}$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $a_k + a_{k+1} = 3k + 2$, 所以 $a_{k+1} + a_{k+2} = 3(k+1) + 2 = 3k + 5$, 两式相减得 $a_{k+2} - a_k = 3$ (提示: 由此可知数列的奇数项构成公差为 3 的等差数列).

将 $k = 1$ 代入 $a_k + a_{k+1} = 3k + 2$, 得 $a_1 + a_2 = 5$,

所以 $a_{2k-1} = a_1 + 3(k-1)$, 所以 $a_{2k-1} + a_2 = 3k + 2$.

当 $k = 1\ 012$ 时, $a_2 + a_{2\ 023} = 3 \times 1\ 012 + 2 = 3\ 038$. 故选 C.

3. B 【解析】由 $\lg a_n + \lg a_{n+1} = \lg 2^n$, 可得 $\lg(a_n a_{n+1}) = \lg 2^n$, 即

$$a_n a_{n+1} = 2^n, \text{ 所以 } a_{n+1} a_{n+2} = 2^{n+1}, \text{ 两式相除可得 } \frac{a_{n+2}}{a_n} = 2, \text{ 即 } \frac{a_3}{a_1} =$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_6}{a_4} = \dots = 2.$$

由 $\lg a_1 + \lg a_2 = \lg a_2 = \lg 2$ 得 $a_2 = 2$, 因此数列 $\{a_n\}$ 的奇数项



是以 $a_1 = 1$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

偶数项是以 $a_2 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列.

所以 $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) = \frac{1 \times (1-2^5)}{1-2} + \frac{2 \times (1-2^4)}{1-2} = 61$. 故选 B.

4. D 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 3$ 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$,

所以 $b_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right)$.

当 n 为偶数时, $T_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{3}$;

当 n 为奇数时, $T_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) + \cdots - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n+3} \leq \frac{8}{15}$.

因为不等式 $T_n < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 恒成立, 即 $(T_n)_{\max} < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 恒成立, 所以 $\frac{8}{15} < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda)$, 解得

$\frac{1}{5} < \lambda < \frac{2}{5}$. 故选 D.

5. ABD 【解析】由题可得, $a_2 = a_1 - 2 = -1, a_3 = a_2 + 2^3 = 7, a_4 = a_3 - 2^3 = -1$, 故 A 正确.

对于 $\forall k \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_{2k+2} = a_{2k+1} - 2^{2k+1}, a_{2k+1} = a_{2k} + 2^{2k+1}$, 两式相加得 $a_{2k+2} = a_{2k}$, 又 $a_2 = -1$, 所以当 n 为偶数时, $a_n = -1$; 由 $a_{2k+1} = a_{2k} + 2^{2k+1}$, 得 $a_{2k+1} = 2^{2k+1} - 1$, 所以当 n 为奇数时, $a_n = 2^n - 1$, 所以

以 $a_n = \begin{cases} 2^n - 1, & n \text{ 为奇数,} \\ -1, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 故 B 正确.

由 B 可知 $S_{2n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{2n+1} = 1 + (-1) + (-1 + 2^3) + (-1) + (-1 + 2^5) + \cdots + (-1 + 2^{2n+1}) = 1 + (-1) \times (2n) + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n+1} = -2n + 1 + \frac{8(1-2^{2n+1})}{1-2^2} = \frac{2^{2n+3} - 6n - 5}{3}$, 则 $3S_{2n+1} = 2^{2n+3} - 6n - 5$, 故 C 错误.

数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n} = -(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) = -(2^1 - 1 + 2^3 - 1 + \cdots + 2^{2n-1} - 1) - n = -\frac{2(4^n - 1)}{3}$, 故

D 正确. 故选 ABD.

6. 【解】 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意可得

$\begin{cases} 3a_2 = a_1 + 2a_3, \\ 4S_2 = \frac{1}{a_1} + 8a_3, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} 3a_1q = a_1 + 2a_1q^2, \\ 4(a_1 + a_1q) = \frac{1}{a_1} + 8a_1q^2, \end{cases}$ 又 $\{a_n\}$ 为递减数列, 所以 $a_1 = q = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n = a_1q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.



因为 $b_{n+1} = 2b_n - 2n + 1$, 所以 $b_{n+1} - 2(n+1) - 1 = 2(b_n - 2n - 1)$ (提示: 构造法求数列的通项公式), 而数列 $\{b_n - 2n - 1\}$ 的首项为 $b_1 - 2 \times 1 - 1 = 0$ (提示: 数列 $\{b_n - 2n - 1\}$ 所有项都为 0), 所以 $b_n - 2n - 1 = 0$, 故 $b_n = 2n + 1$.

(2) 当 n 为奇数时, $c_n = \frac{2n+1}{2^n}$, 令 $A_n = \sum_{i=1}^n c_{2i-1}$,

$$\text{则 } A_n = \frac{3}{2^1} + \frac{7}{2^3} + \frac{11}{2^5} + \cdots + \frac{4n-1}{2^{2n-1}},$$

$$\frac{1}{4}A_n = \frac{3}{2^3} + \frac{7}{2^5} + \cdots + \frac{4n-5}{2^{2n-1}} + \frac{4n-1}{2^{2n+1}},$$

$$\text{两式作差得 } \frac{3}{4}A_n = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^5} + \cdots + \frac{4}{2^{2n-1}} - \frac{4n-1}{2^{2n+1}} = \frac{3}{2} +$$

$$\frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{4n-1}{2^{2n+1}} = \frac{13}{6} - \frac{12n+13}{6 \cdot 4^n},$$

$$\text{则 } A_n = \frac{26}{9} - \frac{12n+13}{9 \cdot 2^{2n-1}}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \frac{6n+19}{2^n(2n+1)(2n+5)} = \frac{4(2n+5) - (2n+1)}{2^n(2n+1)(2n+5)} =$$

$$\frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{n-2}} - \frac{1}{(2n+5) \cdot 2^n},$$

$$\text{令 } B_n = \sum_{i=1}^n c_{2i}, \text{ 则 } B_n = \frac{1}{5 \times 2^0} - \frac{1}{9 \times 2^2} + \frac{1}{9 \times 2^2} - \frac{1}{13 \times 2^4} + \cdots +$$

$$\frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{2n-2}} - \frac{1}{(4n+5) \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{(4n+5) \cdot 2^{2n}}.$$

$$\text{故 } T_{2n} = A_n + B_n = \frac{139}{45} - \frac{12n+13}{9 \cdot 2^{2n-1}} - \frac{1}{(4n+5) \cdot 2^{2n}}.$$

7. (1) 【解】当 $n \geq 2$ 时, 由 $(n-1)a_n - na_{n-1} = 3$ 得 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} =$

$$\frac{3}{n(n-1)} = \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n}, \text{ 因此 } \frac{a_n}{n} + \frac{3}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{3}{n-1}, \text{ 数列 } \left\{ \frac{a_n}{n} + \frac{3}{n} \right\} \text{ 是}$$

常数列, 则 $\frac{a_n}{n} + \frac{3}{n} = \frac{a_1}{1} + \frac{3}{1} = 2$, 即 $\frac{a_n}{n} = \frac{2n-3}{n}$, 所以数列

$$\left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \text{ 的通项公式为 } \frac{a_n}{n} = \frac{2n-3}{n}.$$

(2) 【证明】由 (1) 得 $a_n = 2n - 3$, 则 $2^{a_n} = 2^{2n-3} = \frac{1}{8} \cdot 4^n$, 数列 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列,

$$\text{则 } S_n = \frac{\frac{1}{2}(1-4^n)}{1-4} = \frac{1}{6}(4^n - 1), S_{n+1} = \frac{1}{6}(4^{n+1} - 1), S_{n+2} =$$

$$\frac{1}{6}(4^{n+2} - 1),$$

$$S_n \cdot S_{n+2} = \frac{1}{36}(4^n - 1)(4^{n+2} - 1) = \frac{1}{36}[4^{2n+2} - (4^n + 4^{n+2}) + 1],$$

$$S_{n+1}^2 = \frac{1}{36}(4^{n+1} - 1)^2 = \frac{1}{36}(4^{2n+2} - 2 \cdot 4^{n+1} + 1), \text{ 因此 } S_n \cdot S_{n+2} -$$

$$S_{n+1}^2 = -\frac{1}{4} \cdot 4^n < 0,$$

所以对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$.



(3)【解】由(1)得 $a_n = 2n - 3$, 所以 $b_{2n-1} = 2n - 3, b_{2n} = (-1)^{2n-3} \cdot$

$$(2n-3) \cdot 2^{2n-3} = -(2n-3) \cdot 2^{2n-3},$$

$$\text{则 } b_n = \begin{cases} (3-n) \cdot 2^{n-3}, & n \text{ 为偶数,} \\ n-2, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

当 n 为偶数时, $T_n = (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_n)$,

$$\text{设 } A = b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{n-1}, B = b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_n,$$

$$B = 1 \times 2^{-1} + (-1) \times 2^1 + (-3) \times 2^3 + \cdots + (3-n) \times 2^{n-3},$$

$$\text{则 } 4B = 1 \times 2^1 + (-1) \times 2^3 + \cdots + (3-n) \times 2^{n-1},$$

$$\text{两式相减得 } -3B = \frac{1}{2} + (-2) \cdot (2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{n-3}) - (3-n) \cdot$$

$$2^{n-1} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{2^1 - 2^{n-3} \times 4}{1-4} - (3-n) \cdot 2^{n-1}, \text{ 于是 } B = -\frac{11}{18} +$$

$$\left(\frac{11}{9} - \frac{n}{3}\right) \cdot 2^{n-1}.$$

$$\text{又 } A = b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{n-1} = -1 + 1 + 3 + \cdots + n - 3 = \frac{n^2 - 4n}{4},$$

$$\text{因此 } T_n = A + B = \frac{n^2 - 4n}{4} + \left(\frac{11}{9} - \frac{n}{3}\right) \cdot 2^{n-1} - \frac{11}{18}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数, } n \geq 3 \text{ 时, } T_n = T_{n-1} + b_n = \frac{(n-1)^2 - 4(n-1)}{4} +$$

$$\left(\frac{11}{9} - \frac{n-1}{3}\right) \cdot 2^{n-2} - \frac{11}{18} + n - 2 = \frac{n^2 - 2n}{4} + \left(\frac{11}{9} - \frac{n-1}{3}\right) \cdot 2^{n-2} - \frac{49}{36}, \text{ 而}$$

$T_1 = b_1 = -1$ 满足上式,

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} \frac{n^2 - 4n}{4} + \left(\frac{11}{9} - \frac{n}{3}\right) \cdot 2^{n-1} - \frac{11}{18}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n^2 - 2n}{4} + \left(\frac{11}{9} - \frac{n-1}{3}\right) \cdot 2^{n-2} - \frac{49}{36}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

8. ACD 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_1 = 1, a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d = 8$, 解得 $d = 2$, 故 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1, S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$, 故 A 正确, B 错误;

将数列 $\{a_n\}$ 列举出来为 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, $\cdots$,

数列 $\{S_n - 1\}$ 列举出来为 0, 3, 8, 15, 24, 35, $\cdots$,

故公共项依次为 3, 15, 35, $\cdots$, 即 $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, \cdots, (2n-1) \times (2n+1)$.

故 $b_n = (2n-1) \times (2n+1) = 4n^2 - 1$, 则 $b_{10} = 4 \times 100 - 1 = 399$, 故 C 正确;

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right), \text{ 其前 10}$$

$$\text{项和为 } \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21}, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.}$$

9. BCD 【解析】由题意知, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, 且 $a_n = 2n - 1, b_n = 3n + 1$,

$$A_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9 \times (1 + 17)}{2} = 9^2, B_9 = \frac{9(b_1 + b_9)}{2} = \frac{9 \times (4 + 28)}{2} = 9 \times$$



16, 所以 $\frac{A_9}{B_9} = \frac{9^2}{9 \times 16} = \frac{9}{16}$, 故 A 错误;

数列 $\{a_n\}$ 的各项分别为 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, $\dots$,

数列 $\{b_n\}$ 的各项分别为 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, $\dots$,

则这两个数列的公共项组成的数列为 7, 13, 19, 25, 31, $\dots$,

可知数列 $\{c_n\}$ 是以 7 为首项, 6 为公差的等差数列, 所以 $c_n =$

$7 + 6(n-1) = 6n + 1$, 所以 $C_9 = \frac{9(c_1 + c_9)}{2} = \frac{9 \times (7 + 55)}{2} = 9 \times 31$, 故

$\frac{A_9}{C_9} = \frac{9^2}{9 \times 31} = \frac{9}{31}$, 故 B 正确;

$$\frac{a_n}{c_n - 2024} = \frac{2n-1}{6n+1-2024} = \frac{2n-1}{6n-2023},$$

若 $\frac{2n-1}{6n-2023} < 0, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $1 \leq n \leq 337$,

若 $\frac{2n-1}{6n-2023} > 0, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $n \geq 338$,

$$\text{又 } \frac{2n-1}{6n-2023} = \frac{\frac{1}{3}(6n-2023) + \frac{2020}{3}}{6n-2023} = \frac{1}{3} + \frac{2020}{3(6n-2023)}, \text{ 所}$$

以当 $1 \leq n \leq 337$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 数列 $\left\{ \frac{a_n}{c_n - 2024} \right\}$ 单调递减, 因

此数列 $\left\{ \frac{a_n}{c_n - 2024} \right\}$ 的第 337 项最小, 故 C 正确;

令 $x_n = \frac{a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} = \frac{2n+1}{(3n+1)(3n+4)}$, 则 $x_{n+1} = \frac{2n+3}{(3n+4)(3n+7)}$, 所

$$\text{以 } x_{n+1} - x_n = \frac{2n+3}{(3n+4)(3n+7)} - \frac{2n+1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$- \frac{6n+4}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} < 0, \text{ 即 } x_{n+1} < x_n, \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right\} \text{ 是}$$

递减数列, 故 D 正确. 故选 BCD.

10. 14 49 609 【解析】 $\{3n+2\}$ 与 $\{4n\}$ 的公共项为 $12n-4$

($n \in \mathbf{N}^*$), 去掉它们的公共项后, 剩余的项按从小到大的顺

序排列为 4, 5, 11, 12, 14, 16, 17, 23, 24, 26, 28, 29, 35, 36,

38, 40, 41, $\dots$, 所以 $a_5 = 14$.

且每两个相邻的公共项之间有 5 项, 分别求和,

$$11+12+14+16+17=70, 23+24+26+28+29=130,$$

$$35+36+38+40+41=190, \dots,$$

可以看到以这 5 项的和为项, 从小到大排列构成的新数列

是首项为 70, 公差为 60 的等差数列.

因为 $(202-2) \div 5 = 40$, 所以 $\{a_n\}$ 的前 202 项和为 $4+5+40 \times$

$$70 + \frac{40 \times 39 \times 60}{2} = 49\ 609.$$

11. -69 【解析】 数列 $\{2n+3\}$ 的各项分别为 5, 7, 9, 11, 13, 15,

17, 19, $\dots$, 27, $\dots$, 41, $\dots$,

数列 $\{7n-1\}$ 的各项分别为 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55, $\dots$,

所以这两个数列的公共项是 13, 27, 41, $\dots$, 所以 $\{a_n\}$ 是以

13 为首项, 14 为公差的等差数列, 所以 $a_n = 14n - 1$.



$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{2n-11} = \frac{14n-1}{2n-11} = 7 + \frac{38}{n-\frac{11}{2}},$$

易知 $f(x) = 7 + \frac{38}{x-\frac{11}{2}}$ 在 $(0, \frac{11}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{11}{2}, +\infty)$ 上

单调递减,

又当 $n < \frac{11}{2}$ 时, $b_n < 7$; 当 $n > \frac{11}{2}$ 时, $b_n > 7$, 所以 b_n 的最小项为

$$b_5 = -69.$$

12. 【解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,

所以 $S_3 = 3a_2 = 15$, 得 $a_2 = 5$.

又 $a_2 a_3 = 40$, 所以 $a_3 = 8$, 所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_3 - a_2 = 3$, 则 $a_n = a_2 + (n-2)d = 3n-1$.

因为 $\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2^2}b_2 + \frac{1}{2^3}b_3 + \cdots + \frac{1}{2^n}b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$ (提示: 这种形

式的等式本质是求和), 所以当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2^2}b_2 + \frac{1}{2^3}b_3 +$

$$\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}b_{n-1} = n-1,$$

两式作差得 $\frac{1}{2^n}b_n = 1 (n \geq 2)$, 即 $b_n = 2^n (n \geq 2)$.

令 $n=1$, 得 $\frac{1}{2}b_1 = 1$, 则 $b_1 = 2$, 满足上式, 则 $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

易错点

综上, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 由(1)可得, $a_{50} = 149, b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, b_4 = 16, b_5 = 32, b_6 = 64, b_7 = 128, b_8 = 256$,

经验证数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中与数列 $\{b_n\}$ 的公共项共有 4 项, 分别为 2, 8, 32, 128, 从而数列 $\{a_n\}$ 中去掉的是 2, 8, 32,

128 这 4 项, 所以 $T_{50} = S_{54} - (2+8+32+128) = 2 \times 54 + \frac{54 \times 53}{2} \times$

$$3 - 170 = 4\,231.$$

13. 【解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$, 则

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q = 6, \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = 24, \end{cases} \quad \text{解得 } a_1 = 2, q = 2, \text{ 所以 } a_n = 2^n.$$

(2) 易知 $b_n = \log_2 a_n = n$, 则 $c_n = 2n-9, a_n c_n = (2n-9) \cdot 2^n$.

$$S_{2n} = b_1 + a_1 c_1 + b_2 + a_2 c_2 + b_3 + a_3 c_3 + \cdots + b_n + a_n c_n = (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots + a_n c_n).$$

$$\text{设 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n, \text{ 则 } T_n = \frac{n(1+n)}{2},$$

$$\text{设 } M_n = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots + a_n c_n,$$

$$\text{则 } M_n = -7 \cdot 2 + (-5) \cdot 2^2 + (-3) \cdot 2^3 + \cdots + (2n-9) \cdot 2^n,$$

$$2M_n = (-7) \cdot 2^2 + (-5) \cdot 2^3 + \cdots + (2n-11) \cdot 2^n + (2n-9) \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{所以 } -M_n = -7 \cdot 2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1} - (2n-9) \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{即 } -M_n = -14 + (2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}) - (2n-9) \cdot 2^{n+1}$$

$$= -14 + \frac{8(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-9) \cdot 2^{n+1} = -22 + (11-2n) \cdot 2^{n+1},$$



所以 $M_n = 22 + (2n - 11) \cdot 2^{n+1}$, 所以 $S_{2n} = T_n + M_n = \frac{n(1+n)}{2} + (2n-11) \cdot 2^{n+1} + 22$.

14. (1) 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由题意得 $\begin{cases} 1+2d=q, \\ 1+3d+1+4d=q^2, \end{cases}$ 解得 $d=1, q=3$ 或 $d=-\frac{1}{4}, q=\frac{1}{2}$.

因为等比数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, $b_1=1$, 所以 $q>1$, 所以 $d=1, q=3$, 所以 $a_n=n, b_n=3^{n-1}$.

(2) 【解】设在数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项中, 来自 $\{a_n\}$ 的有 m 项, 分 $c_{100}=a_m$ 与 $c_{100}=3$ 两种情况讨论, 可得数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项包含 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 及 95 个 3.

设在数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项中, 来自 $\{a_n\}$ 的有 m 项,

若 $c_{100}=a_m$, 则 $m+1+3+3^2+\cdots+3^{m-2}=100$, 整理得 $m+\frac{3^{m-1}-1}{2}=100$.

注意到函数 $f(x)=x+\frac{3^{x-1}-1}{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(4)=17, f(5)=45, f(6)=127$, 又 $f(5)<100<f(6)$, 则 $m+\frac{3^{m-1}-1}{2}=100$ 无整数解, 不满足题意.

若 $c_{100}=3$, 则 $\begin{cases} m+1+3+3^2+\cdots+3^{m-2}<100, \\ m+1+3+3^2+\cdots+3^{m-1}\geq 100, \end{cases}$

即 $\begin{cases} m+\frac{3^{m-1}-1}{2}<100, \\ m+\frac{3^m-1}{2}\geq 100, \end{cases}$

由 $m+\frac{3^{m-1}-1}{2}<100$ 得 $0<m\leq 5$.

注意到函数 $g(x)=x+\frac{3^x-1}{2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(5)=126>100, g(4)=44<100$, 则当 $m=5$ 时, 满足题意.

故数列 $\{c_n\}$ 前 100 项包含 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 及 95 个 3, 所以 $T_{100}=1+2+3+4+5+95\times 3=300$.

(3) 【证明】第一步: 设 $A_n=d_1+d_3+d_5+\cdots+d_{2n-1}$, 利用错位相减法求 A_n 的取值范围.

当 $n=2k-1 (k\geq 1, k\in\mathbf{N}^*)$ 时, $d_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{3^{n-1}}$,

设 $A_n=d_1+d_3+d_5+\cdots+d_{2n-1}$,

则 $A_n=\frac{1}{1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^4}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{2n-2}}$,

$\frac{1}{9}A_n=\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{2n-2}}+\frac{2n-1}{3^{2n}}$.

从而 $\frac{8}{9}A_n=1+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\cdots+\frac{2}{3^{2n-2}}-\frac{2n-1}{3^{2n}}=1+\frac{2}{3^2}\times\frac{1-\frac{1}{9^{n-1}}}{1-\frac{1}{9}}-$



$$\frac{2n-1}{3^{2n}},$$

$$\text{即 } \frac{8}{9}A_n = \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4} + 2n\right) \frac{1}{9^n} < \frac{5}{4}, \text{ 即 } A_n < \frac{45}{32}.$$

$$\text{当 } n = 2k (k \geq 1, k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } d_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

第二步: 设 $B_n = d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n}$, 利用裂项相消法求 B_n 的取值范围.

$$\text{设 } B_n = d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n},$$

$$\text{则 } B_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } A_n + B_n < \frac{45}{32} + \frac{1}{2} = \frac{61}{32} < 2, \text{ 即 } \sum_{i=1}^{2n} d_i < 2.$$

专题4 数列与其他知识的融合问题



题型上分练

1. (1) 【解】当 $n=1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = a_1^2 + a_1$, 又 $a_n > 0$, 所以 $a_1 = 1$.

对于 $2S_n = a_n^2 + a_n$, 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$, 两式相减整理可得 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0$, 又 $\{a_n\}$ 为正项数列, 故 $a_n -$

关键点

$a_{n-1} = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $a_n = n$.

(2) 【证明】由 (1) 可知 $a_n = n$, 所以 $b_n = \frac{1}{2^n - 1}$, 显然 $T_1 = b_1 = 1 < 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $2^n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 > 2^{n-1}$, 即 $\frac{1}{2^n - 1} < \frac{1}{2^{n-1}}$

(提示: 指数放缩的应用),

$$\text{所以 } T_n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2.$$

综上, $T_n < 2$.

2. (1) 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意可知

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 9, \\ 4a_1 + 6d = 30, \end{cases} \text{ 解得 } a_1 = 3, d = 3, \text{ 故 } a_n = a_1 + (n-1)d = 3n.$$

(2) 【解】由 (1) 得 $S_n = \frac{n(3+3n)}{2} = \frac{3}{2}n(n+1)$, 所以 $\frac{1}{S_n} =$

$$\frac{2}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{1}{S_n} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为}$$

$$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = \frac{2n}{3(n+1)}.$$

(3) 【证明】由 (2) 知 $\frac{1}{S_i} = \frac{2}{3i(i+1)} < \frac{2}{3i^2}$ (提示: 放缩法), 其中

$$i = 4, 8, \cdots, 2^n,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_4} + \frac{1}{S_8} + \cdots + \frac{1}{S_{2^n}} < \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \right.$$



$$\left. \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} \right) = \frac{2}{3} \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{2^4} \left(1 - \frac{1}{4^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{4}}}{1 - \frac{1}{4}} \right] < \frac{2}{3} \times$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{4}}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{综上所述, } \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_4} + \frac{1}{S_8} + \cdots + \frac{1}{S_{2^n}} < \frac{1}{2}.$$

3. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_3 = 2S_2 + a_1$ 可知 $a_1 + a_2 + a_3 = 2(a_2 + a_1) + a_1$, 则 $a_2 = 3a_1$.

对于 $a_{2n} = 2a_n + 1$, 令 $n = 1$, 可得 $a_2 = 2a_1 + 1$, 联立

$$\begin{cases} a_2 = 3a_1, \\ a_2 = 2a_1 + 1, \end{cases} \text{ 解得 } a_1 = 1, a_2 = 3, \text{ 则 } d = 2, \therefore a_n = 2n - 1.$$

(2) 当 $x \neq -1$ 且 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x[1 + (1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{2n-1}]$

关键点

$$= x \frac{(1+x)^{2n} - 1}{(1+x) - 1} = (1+x)^{2n} - 1,$$

当 $x = -1$ 或 $x = 0$ 时, $f(x) = (1+x)^{2n} - 1$ 也成立,

$$\therefore f(x) = (1+x)^{2n} - 1.$$

$$f'(x) = 2n(1+x)^{2n-1}, \text{ 则 } f'(1) = n \cdot 2^{2n} = n \cdot 4^n, \text{ 则 } b_n = n \cdot 4^n.$$

$$\therefore T_n = 1 \times 4 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n,$$

$$\therefore 4T_n = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + \cdots + n \cdot 4^{n+1},$$

$$\therefore -3T_n = 4 + 4^2 + \cdots + 4^n - n \cdot 4^{n+1} = \frac{4^n - 1}{4 - 1} \times 4 - n \cdot 4^{n+1} =$$

$$\frac{(1-3n) \cdot 4^{n+1} - 4}{3},$$

$$\therefore T_n = \frac{(3n-1) \cdot 4^{n+1} + 4}{9}.$$

4. (1) 【解】由题意得 $S_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3$, 则 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n =$

$$\left[3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 3 \right] - \left[3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3 \right] = \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, 又因为 $a_1 = S_1 = 3 \times \frac{4}{3} - 3 = 1 =$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1-1}, \text{ 所以 } a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 【解】对 $f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \ln \frac{4}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{f'(n)}{a_n} = \frac{3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \ln \frac{4}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} = 4 \ln \frac{4}{3}.$$

(3) 【证明】**第一步: 根据条件算出数列 $\left\{ \frac{1}{f(b_n)f'(b_n)} \right\}$ 的通项公式.**

由题意可得 $b_n = f^{-1}(3n) = \log_{\frac{4}{3}}(n+1)$, 从而 $f(b_n) = 3 \cdot$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}}(n+1)} - 3 = 3(n+1) - 3 = 3n, f'(b_n) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}}(n+1)}.$$



$$\ln \frac{4}{3} = 3(n+1) \ln \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{f(b_n)f'(b_n)} = \frac{1}{9n(n+1) \ln \frac{4}{3}} = \frac{1}{9 \ln \frac{4}{3}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

第二步:利用裂项相消法求 T_n 并进行放缩.

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{9 \ln \frac{4}{3}} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{9 \ln \frac{4}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{9 \ln \frac{4}{3}}.$$

第三步:构造函数,利用函数的单调性证明不等式.

$$\text{设 } g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, x > 0, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, \text{ 当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } g'(x) < 0, g(x) \text{ 单调递减, 当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增, 故 } g(x) \geq g(1) = 0, \text{ 因此 } g\left(\frac{4}{3}\right) = \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0, \text{ 即 } \ln \frac{4}{3} > \frac{1}{4}, \text{ 所以 } T_n < \frac{1}{9 \ln \frac{4}{3}} < \frac{1}{9 \times \frac{1}{4}} = \frac{4}{9}.$$

5. 【解】(1) 设交换 n 次后, 小明恰有 2 张中奖券的概率为 q_n ,

$$\text{由题意得第 1 次交换: } p_1 = \frac{2}{3}, q_1 = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } p_2 = p_1 \times \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] + q_1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27}.$$

(2) ① 交换 n 次后, 小明恰有 2 张“中奖”奖券, 则交换 $n+1$ 次后, 小明恰有 1 张“中奖”奖券的概率 $p' = q_n \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} q_n$;

② 交换 n 次后, 小明恰有 1 张“中奖”奖券, 则交换 $n+1$ 次后, 小明恰有 1 张“中奖”奖券的概率 $p'' = p_n \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{5}{9} p_n$,

③ 交换 n 次后, 小明恰有 0 张“中奖”奖券, 则交换 $n+1$ 次后, 小明恰有 1 张“中奖”奖券的概率 $p''' = (1 - p_n - q_n) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (1 - p_n - q_n)$.

$$\text{综上, } p_{n+1} = p' + p'' + p''' = \frac{2}{3} q_n + \frac{5}{9} p_n + \frac{2}{3} (1 - p_n - q_n) = -\frac{1}{9} p_n + \frac{2}{3}.$$

(3) 第一步:由(2)得到 p_n, p_{n+1} 的递推关系.

$$\text{由(2)知 } p_{n+1} = -\frac{1}{9} p_n + \frac{2}{3},$$

第二步:构造等比数列.

$$\text{设 } p_{n+1} + x = -\frac{1}{9} (p_n + x), \text{ 则 } p_{n+1} = -\frac{1}{9} p_n - \frac{10}{9} x,$$

$$\text{令 } -\frac{10}{9} x = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } x = -\frac{3}{5}, \text{ 所以 } p_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{9} \left(p_n - \frac{3}{5} \right),$$



又 $p_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$, 所以数列 $\left\{p_n - \frac{3}{5}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{15}$, 公比为 $-\frac{1}{9}$ 的等比数列,

第三步: 求 p_n .

所以 $p_n - \frac{3}{5} = \frac{1}{15} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$, 所以 $p_n = \frac{1}{15} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$,

第四步: 求 S_n .

所以 $S_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \frac{1}{15} \times \left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)} \right] + \frac{3n}{5} =$
 $\frac{3}{50} \left[1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^n \right] + \frac{3n}{5}.$

6. 【证明】(1) 先证明函数 $f(x)$ 为偶函数, 再通过导数研究 $x \geq 0$ 时函数的单调性, 得出 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值, 从而证明 $f(x) \geq 0$.

$\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, $f(-x) = a(-x)^2 + \cos(-x) - 1 = ax^2 + \cos x - 1 = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数.

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = 2ax - \sin x$, 令 $\varphi(x) = f'(x) = 2ax - \sin x$.

又 $a \geq \frac{1}{2}$, $\therefore \varphi'(x) = 2a - \cos x \geq 1 - \cos x \geq 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0) = 0$, 结合偶函数的性质可知 $f(x) \geq 0$.

(2) 利用(1)的结论得到 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$, 再对 $\cos \frac{1}{n}$ 进行放缩并利用裂项相消法求和, 最终证明不等式.

由(1)可得, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1 \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立, 即 $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.

令 $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\cos \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{2n^2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\cos \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{2n^2} = 1 - \frac{2}{4n^2} > 1 - \frac{2}{4n^2 - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, 即 $\cos \frac{1}{n} > 1 - \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$,

则 $\cos \frac{1}{2} > 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$, $\cos \frac{1}{3} > 1 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$, $\cdots$, $\cos \frac{1}{n} > 1 - \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$,

相加可得 $\cos \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{3} + \cdots + \cos \frac{1}{n} > (n-1) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) =$
 $n - \frac{4}{3} + \frac{1}{2n+1}.$

$\because n \geq 2, \therefore \frac{1}{2n+1} > 0, \therefore \cos \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{3} + \cdots + \cos \frac{1}{n} > n - \frac{4}{3} (n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$

7. (1) 【解】由题意知 $M_1(0, 1)$, $\overrightarrow{M_1Q_1} = 3\overrightarrow{M_1P_1}$, 又 $P_1(1, 1)$,



所以 $Q_1(3, 1)$, 所以直线 $OQ_1: y = \frac{1}{3}x$,

$$\text{由} \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ y = \frac{1}{3}x, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x = \frac{9}{5}, \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

因此 $P_2\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

(2) 【证明】因为 $P_n(a_n, b_n), M_n(0, b_n), \overrightarrow{M_n Q_n} = \lambda \overrightarrow{M_n P_n}$,

所以 $Q_n(\lambda a_n, b_n)$, 所以直线 $OQ_n: y = \frac{b_n}{\lambda a_n}x, a_n \neq 0, b_n \neq 0$.

$$\text{由} \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ y = \frac{b_n}{\lambda a_n}x, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x = \frac{2\lambda^2 a_n^2}{\lambda^2 a_n^2 + b_n^2}, \\ y = \frac{2\lambda a_n b_n}{\lambda^2 a_n^2 + b_n^2} \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\text{因此 } a_{n+1} = \frac{2\lambda^2 a_n^2}{\lambda^2 a_n^2 + b_n^2}, b_{n+1} = \frac{2\lambda a_n b_n}{\lambda^2 a_n^2 + b_n^2},$$

因为 $(a_n - 1)^2 + b_n^2 = 1$, 所以 $b_n^2 = 2a_n - a_n^2$,

$$\text{所以 } a_{n+1} = \frac{2\lambda^2 a_n^2}{\lambda^2 a_n^2 + 2a_n - a_n^2} = \frac{2\lambda^2 a_n}{(\lambda^2 - 1)a_n + 2},$$

$$\text{因此 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} \neq 0,$$

$$\text{因此 } \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{提示: 由等比数列的定义判定等比数列}),$$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} \right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{\lambda^2}$ 为公比的等比数列.

$$(3) \text{ 【解】 由(2)得 } \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)^{n-1}, \text{ 即 } a_n = \frac{2\lambda^{2n-2}}{\lambda^{2n-2} + 1},$$

$$\text{于是 } b_n^2 = 2a_n - a_n^2 = \frac{4\lambda^{2n-2}}{(\lambda^{2n-2} + 1)^2},$$

$$\text{注意到 } b_n > 0, \text{ 因此 } b_n = \frac{2\lambda^{n-1}}{\lambda^{2n-2} + 1},$$

关键点

因为 $P_1(1, 1), P_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$,

所以直线 $P_1 P_{n+1}: (b_{n+1} - 1)x - (a_{n+1} - 1)y + a_{n+1} - b_{n+1} = 0$,

$$\text{因此 } \frac{S_n}{T_n} = \frac{|a_{n+1} - b_{n+1}|}{|a_{n+1} + b_{n+1} - 2|} = \frac{\left| \frac{2\lambda^{2n}}{\lambda^{2n} + 1} - \frac{2\lambda^n}{\lambda^{2n} + 1} \right|}{\left| \frac{2\lambda^{2n}}{\lambda^{2n} + 1} + \frac{2\lambda^n}{\lambda^{2n} + 1} - 2 \right|} = \lambda^n.$$

因为 $n^2 T_n (S_m - T_m) = m^2 T_m (S_n - T_n)$,

$$\text{所以 } n^2 \left(\frac{S_m}{T_m} - 1 \right) = m^2 \left(\frac{S_n}{T_n} - 1 \right), \text{ 即 } \frac{\lambda^m - 1}{m^2} = \frac{\lambda^n - 1}{n^2},$$

$$\text{设 } f(n) = \frac{\lambda^n - 1}{n^2}, n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{则 } f(n+1) - f(n) = \frac{\lambda^n [\lambda n^2 - (n+1)^2] + 2n+1}{n^2 (n+1)^2},$$

因为 $\lambda \geq \sqrt{5}, n \geq 3$,



所以 $\lambda n^2 - (n+1)^2 > 2n^2 - (n+1)^2 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$,

所以 $f(n+1) > f(n)$, 即 $f(n)$ 单调递增.

又 $f(m) = f(n)$, $m < n$,

所以 $m = 1$ 或 $m = 2$.

若 $m = 1$, 则 $\lambda - 1 = \frac{\lambda^n - 1}{n^2} = f(n)$, $n \geq 2$,

当 $n \geq 4$ 时, $f(n) \geq \frac{\lambda^4 - 1}{16} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)}{16} \geq$

$\frac{6(\sqrt{5} + 1)(\lambda - 1)}{16} > \lambda - 1$,

因此 $n = 2$ 或 $n = 3$,

当 $n = 2$ 时, $\lambda - 1 = \frac{\lambda^2 - 1}{4}$, 解得 $\lambda = 3$,

当 $n = 3$ 时, $\lambda - 1 = \frac{\lambda^3 - 1}{9}$, 解得 $\lambda = \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.

若 $m = 2$, 则 $\frac{\lambda^2 - 1}{4} = \frac{\lambda^n - 1}{n^2} = f(n)$, $n \geq 3$,

当 $n \geq 4$ 时, $f(n) \geq \frac{\lambda^4 - 1}{16} = \frac{\lambda^2 - 1}{4} \cdot \frac{\lambda^2 + 1}{4} \geq \frac{\lambda^2 - 1}{4} \cdot \frac{6}{4} > \frac{\lambda^2 - 1}{4}$,

因此 $n = 3$, 所以 $\frac{\lambda^2 - 1}{4} = \frac{\lambda^3 - 1}{9}$, 解得 $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$ (舍).

综上, $\lambda = 3$ 或 $\lambda = \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$.

真题风向练

8. 命题点 ④ 数列新定义

(1) 【解】满足题意的 (i, j) 为 $(1, 2), (1, 6), (5, 6)$ 3 分

(2) 【证明】因为在公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_p, a_q, a_m, a_n 成等差数列 $\Leftrightarrow p, q, m, n$ 成等差数列, 5 分

当 $m > 3$ 时, $a_{15}, a_{16}, \dots, a_{4m+2}$ 可连续 4 项为一组等差数列, 故需证明序号为 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14 的项可分成三组项数为 4 的等差数列, 易知分为 $(1, 4, 7, 10), (3, 6, 9, 12), (5, 8, 11, 14)$ 三组满足题意, 所以当 $m \geq 3$ 时, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列. 7 分

(3) 【证明】方法一: 由 (2) 可知, 等差数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列 $\Leftrightarrow$ 数列 $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 (i, j) -可分数列.

下面证明 $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 $(4k+1, 4r+2)$ -可分数列 ($0 \leq k \leq r \leq m$).

当 $r = k$ 时, $4k+1$ 与 $4r+2$ 是相邻两项, 可分为 $(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), \dots, (4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k), (4k+3, 4k+4, 4k+5, 4k+6), \dots, (4m-1, 4m, 4m+1, 4m+2)$ 9 分

当 $r > k$ 时, $4k+1, 4k+2, \dots, 4r+1, 4r+2$, 共 $4(r-k)+2$ 项, 中间的 $4(r-k)$ 项可连续 4 项为一组, 前后的项可分为 $(1, 2, 3, 4), \dots, (4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k)$ 与 $(4(r+1)-1, 4(r+1), 4(r+1)+1, 4(r+1)+2), \dots, (4m-1, 4m, 4m+1, 4m+2)$.

此时, (k, r) 共有 $C_{m+1}^2 + (m+1) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 组. 10 分

再证: $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 $(4k+2, 4r+1)$ -可分数列 ($0 \leq k < r \leq m$).



易知 $1 \sim 4k$ 与 $4r+3 \sim 4m+2$ 是可分的,

只需考虑 $4k+1, 4k+3, 4k+4, \dots, 4r-1, 4r, 4r+2$ 的可分性.

设 $p=r-k \in \mathbf{N}^*$, 只需证: $1, 3, 4, \dots, 4p-1, 4p, 4p+2$ 可分 (提示: $1 \sim 4p+2$ 去掉 2 与 $4p+1$).

当 $p=1$ 时, $1, 3, 4, 6$, 无法做到;

当 $p=2$ 时, $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$, 可以做到;

当 $p=3$ 时, $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14$, 可以做到;

当 $p=4$ 时, $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18$,
($1, 5, 9, 13$), ($3, 7, 11, 15$), ($4, 8, 12, 16$), ($6, 10, 14, 18$) 满足题意. 13 分

故 $\forall p \geq 2$, 可划分为:

($1, p+1, 2p+1, 3p+1$), ($3, p+3, 2p+3, 3p+3$), ($4, p+4, 2p+4, 3p+4$), ($5, p+5, 2p+5, 3p+5$), $\dots$, ($p, 2p, 3p, 4p$), ($p+2, 2p+2, 3p+2, 4p+2$), 共 p 组.

事实上, 就是 ($i, p+i, 2p+i, 3p+i$), $i=1, 3, \dots, p, p+2$, 且把 2 换成 $4k+2$, 此时, (k, r) 即 ($k, k+p$), $p \geq 2$ 共有 $C_{m+1}^2 - m = \frac{1}{2}m(m-1)$ 组 (提示: ($0, 1$), ($1, 2$), $\dots$, ($m-1, m$) 不可行).

综上, 可行的 ($4k+2, 4r+1$) 与 ($4k+1, 4r+2$) 至少有 $\frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 组, 16 分

故 $P_m \geq \frac{\frac{1}{2}(2m^2+2m+2)}{C_{4m+2}^2} = \frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)} = \frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1} > \frac{1}{8}$. 得证! 17 分

方法二: 对于等差数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 中的 $a_i, a_j, i < j$.

若 $i \equiv 1 \pmod{4}, j \equiv 2 \pmod{4}$, 则

$a_1, a_2, a_3, a_4; a_5, a_6, a_7, a_8; \dots; a_{i-4}, a_{i-3}, a_{i-2}, a_{i-1}$ 构成 $\frac{i-1}{4}$ 个等差数列,

$a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}; a_{i+5}, a_{i+6}, a_{i+7}, a_{i+8}; \dots; a_{j-4}, a_{j-3}, a_{j-2}, a_{j-1}$ 构成 $\frac{j-i-1}{4}$ 个等差数列.

$a_{j+1}, a_{j+2}, a_{j+3}, a_{j+4}; a_{j+5}, a_{j+6}, a_{j+7}, a_{j+8}; \dots; a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}$ 构成 $\frac{4m+2-j}{4}$ 个等差数列,

故成立. 10 分

此时, (i, j) 有 $C_{m+1}^2 + (m+1) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 组,

$\frac{\frac{1}{2}(m+1)(m+2)}{C_{4m+2}^2} = \frac{m^2+3m+2}{16m^2+12m+2} > \frac{1}{16}$.

由 (2) 可知, 考虑 $i < j, i \equiv 2 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{4}$ 的可行性.

令 $k = \frac{j+1-i}{4}$, 则 $k \in \mathbf{N}^*$.



当 $k=1$ 时,有 $1,3,4,6$,不可行.

当 $k=2$ 时,有 $(1,3,5,7), (4,6,8,10)$.

当 $k=3$ 时,有 $(1,4,7,10), (3,6,9,12), (5,8,11,14)$.

不难发现几个等差数列的公差均为 k ,故我们可尝试构造一个关于 k 的一般性的式子求解. 13 分

对于 $i=4p+2, j=4q+1$ 的情况: $a_1, a_2, a_3, a_4; a_5, a_6, a_7, a_8; \dots;$

$a_{i-5}, a_{i-4}, a_{i-3}, a_{i-2}$ 构成 $\frac{i-2}{4}$ 个等差数列.

而对于中间部分,不妨取 $i=2, j=4k+1$.

则 $(1, 1+k, 1+2k, 1+3k), (3, 3+k, 3+2k, 3+3k), (4, 4+k, 4+2k, 4+3k), \dots, (k-1, 2k-1, 3k-1, 4k-1), (k, 2k, 3k, 4k),$

$(k+2, 2k+2, 3k+2, 4k+2)$, 此时恰好没有 2 和 $4k+1$, 恰好是

$\frac{j+1-i}{4}$ 个等差数列,故构造成立. 15 分

综上,已证 $i < j, i \equiv 1 \pmod{4}, j \equiv 2 \pmod{4}$ 时成立;

$i < j, i \equiv 2 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{4}$ 且 $j \neq i+3$ 时成立.

首先: $C_{4m+2}^2 = (2m+1)(4m+1)$,

1° 当 $i=1$ 时,有 $m+1$ 个 j 满足;当 $i=5$ 时,有 m 个 j 满足;...

当 $i=4m+1$ 时,有 1 个 j 满足.

共有 $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ 组 (i, j) .

2° 当 $i=2$ 时,有 $m-1$ 个 j 满足;当 $i=6$ 时,有 $m-2$ 个 j 满足;...

当 $i=4m-2$ 时,有 0 个 j 满足.

共有 $\frac{(m-1)m}{2}$ 组 (i, j) .

故 $P_m \geq \frac{\frac{(m+2)(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2}}{(2m+1)(4m+1)} = \frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1} > \frac{1}{8}$, 证毕.

..... 17 分

方法三:先证数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 4k+1)$ -可分数列(其中 $k \geq 2$).

当 $k=2$ 时, $a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}$ 分成 $(a_1, a_3, a_5, a_7), (a_4, a_6, a_8, a_{10})$ 两组等差数列, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{4m+2}$, 4 项一组成等差数列,所以 $k=2$ 时成立.

当 $k=3$ 时,由 (2) 可知数列是 $(2, 13)$ -可分数列.

当 $k=4$ 时, $a_1, a_3, \dots, a_{16}, a_{18}$ 分成 $(a_1, a_5, a_9, a_{13}), (a_3, a_7, a_{11}, a_{15}), (a_4, a_8, a_{12}, a_{16}), (a_6, a_{10}, a_{14}, a_{18})$ 四组等差数列, $a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{4m+2}$, 4 项一组成等差数列,所以 $k=4$ 时成立.

以此类推,当 $k=m$ 时, $a_1, \dots, a_{4m+2}$ 可划分成 $(a_1, a_{1+m}, a_{1+2m}, a_{1+3m}), (a_3, a_{3+m}, a_{3+2m}, a_{3+3m}), \dots, (a_m, a_{2m}, a_{3m}, a_{4m}), (a_{2+m}, a_{2+2m}, a_{2+3m}, a_{2+4m})$, 共 m 组等差数列. 12 分

下面用数学归纳法证明 $P_m > \frac{1}{8}$.

① 当 $m=1$ 时,删去的 (a_i, a_j) 为 $(a_1, a_6), (a_1, a_2), (a_5, a_6)$,

共 3 个, $P_1 = \frac{3}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, 所以 $P_1 > \frac{1}{8}$ 成立.



②假设 $m=k(k \geq 1)$ 时, $P_m > \frac{1}{8}$ 成立, 则当 $m=k+1$ 时,

1°若 $a_i, a_j \notin \overbrace{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}}^{\text{前4项}}$ 或 $a_i, a_j \notin \overbrace{\{a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}\}}^{\text{后4项}}$,
则去掉这 4 项, 变为 $m=k$ 的情形;

2°若 $a_i \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, a_j \in \{a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}\}, (a_i, a_j)$ 共 $4 \times 4 = 16$ 种情况, 其中 (a_1, a_{4m+2}) 和 (a_2, a_{4m+1}) 成立, 至少两种; 15 分

当 $a_i, a_j \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 或 $a_i, a_j \in \{a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, a_{4m+2}\}$ 时,

其中 (a_1, a_2) 和 (a_{4m+1}, a_{4m+2}) 成立, 概率为 $\frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$.

所以 $P_{k+1} > P(1^\circ) \cdot P_k + P(2^\circ) \cdot \frac{2}{16}$.

又因为 $P(1^\circ) + P(2^\circ) = 1$, 所以 $P_{k+1} > P(1^\circ) \cdot \frac{1}{8} + (1 - P(1^\circ)) \cdot$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

由①②可知, $P_m > \frac{1}{8}$ 对 $m \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

所以 $P_m > \frac{1}{8}$ 成立. 得证! 17 分

第 1 章 ▶ 真题综合测试

题组 1

1. C **命题点** ①数列的前 n 项和与通项的关系, 等比数列的判断及其通项

【解析】由题意知, 当 $n=1$ 时, $a_2 = 2S_1 + 2 = 6$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 则 $a_n = 2S_{n-1} + 2$, 两式相减得 $a_{n+1} = 3a_n$. 又 $a_2 = 3a_1, a_1 = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $a_4 = 54$. 故选 C.

2. B **命题点** ②等差数列的前 n 项和

【解析】方法一: 记 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $S_3 = 6, S_5 = -5$, 所以 $\begin{cases} 3a_1 + 3d = 6, \\ 5a_1 + 10d = -5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = -3 \end{cases}$ (另解:

因为 $S_3 = \frac{3 \times (a_1 + a_3)}{2} = \frac{3 \times 2a_2}{2} = 3a_2 = 6$, 所以 $a_2 = 2$; 因为 $S_5 =$

$\frac{5 \times (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \times 2a_3}{2} = 5a_3 = -5$, 所以 $a_3 = -1$, 所以 $d = a_3 - a_2 =$

-3 , 所以 $a_1 = a_2 - d = 5$),

所以 $S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 5 + 15 \times (-3) = -15$ (另解: $a_6 = a_2 + 4d = 2 - 12 = -10, S_6 = a_6 + S_5 = -10 - 5 = -15$). 故选 B.

方法二: 因为 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 所以设 $S_n = An^2 + Bn$,

由 $S_3 = 6, S_5 = -5$, 得 $\begin{cases} 9A + 3B = 6, \\ 25A + 5B = -5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A = -\frac{3}{2}, \\ B = \frac{13}{2}, \end{cases}$



所以 $S_n = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n$, 所以 $S_6 = -\frac{3}{2} \times 36 + \frac{13}{2} \times 6 = -15$. 故选

B.

3. AD 命题点 等比数列的前 n 项和、等比数列的通项公式

【解析】根据题意, 由 $\begin{cases} S_3 = 7, \\ a_3 = 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7 \text{ ①}, \\ a_1q^2 = 1 \text{ ②}, \end{cases}$ ① $\div$ ② 得

$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7$, 化简得 $6q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{1}{3}$ (舍

去), 故 A 正确; 由 A 可知 $q = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$, 因此 $a_n = 4 \times$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 则 $a_5 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ (另解: $a_5 = a_3 \cdot q^2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$),

故 B 错误; $S_5 = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}$, 故 C 错误; $a_n + S_n = 4 \times$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 8$, 故 D 正

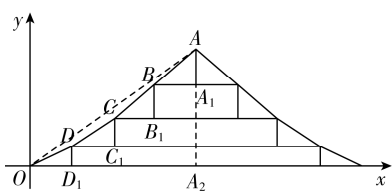
确. 故选 AD.

一题多解

对于 A, 由 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7$, 整理得 $6q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 A 正确; 对于 C, 因为 $S_3 = 7, a_4 = a_3q = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_5 = a_4q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 所以 $S_5 = S_3 + a_4 + a_5 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$, 故 C 错误.

4. D 命题点 等差数列的性质、斜率与倾斜角在数学文化中的应用

【解析】如图, 连接 OA , 延长 AA_1 与 x 轴交于点 A_2 , 则 $OA_2 = 4OD_1$. 因为 k_1, k_2, k_3 成公差为 0.1 的等差



数列, 所以 $k_1 = k_3 - 0.2, k_2 = k_3 - 0.1$, 所以 $CC_1 = DC_1(k_3 - 0.2)$, $BB_1 = CB_1(k_3 - 0.1), AA_1 = k_3BA_1$, 即 $CC_1 = OD_1(k_3 - 0.2), BB_1 = OD_1(k_3 - 0.1), AA_1 = k_3OD_1$ (关键: 利用等差数列的性质, 将各

条线段用 k_3 和 OD_1 表示出来). 又 $\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5$, 所以 $DD_1 =$

$0.5OD_1$, 所以 $AA_2 = 0.5OD_1 + OD_1(k_3 - 0.2) + OD_1(k_3 - 0.1) +$

$k_3OD_1 = OD_1(3k_3 + 0.2)$. 所以 $\tan \angle AOA_2 = \frac{AA_2}{OA_2} = \frac{OD_1(3k_3 + 0.2)}{4OD_1} =$

0.725 , 解得 $k_3 = 0.9$, 故选 D.

5. C 命题点 等比数列的求和

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q (提示: 本题中等比数列



$\{a_n\}$ 的公比 $q \neq \pm 1$). 因为 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21S_2 = 21 \cdot \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$,

整理得 $1-q^6 = 21(1-q^2)$, 又 $1-q^6 = (1-q^2)(1+q^2+q^4)$, 所以 $1+q^2+q^4 = 21$, 即 $(q^2-4)(q^2+5) = 0$, 解得 $q^2 = 4$.

又 $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$, $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5$, 所以 $\frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 =$

17, 故 $S_8 = -85$, 故选 C.

一题多解 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 根据等比数列前 n

项和的性质得 $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 成等比数列, 因为

$S_4 = -5, S_6 = 21S_2$, 即 $S_2, -5-S_2, 21S_2+5, S_8-21S_2$ 成等比数

列, 公比为 q^2 , 所以 $(-5-S_2)^2 = (21S_2+5)S_2$, 整理得

$(4S_2-5)(S_2+1) = 0$, 解得 $S_2 = \frac{5}{4}$ 或 $S_2 = -1$. 当 $S_2 = \frac{5}{4}$ 时,

$\frac{S_4-S_2}{S_2} = -5 < 0$, 不符合题意; 当 $S_2 = -1$ 时, 即 $-1, -4, -16,$

S_8+21 成等比数列, 所以 $(S_8+21) \times (-4) = (-16)^2$, 解得

$S_8 = -85$, 故选 C.

6. AD 必刷知识 ⊙ 等差数列及其前 n 项和

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 对于 A, 由 $a_3+a_7=4$ 得

$2a_5=4$, 即 $a_5=2$, 所以 $S_9 = \frac{(a_1+a_9) \times 9}{2} = 9a_5 = 18$, 故 A 正确.

对于 B, 因为 $S_{15} > 0$, 所以 $S_{15} = \frac{(a_1+a_{15}) \times 15}{2} = 15a_8 > 0$, 所以

$a_8 > 0$. 又因为 $S_{16} < 0$, 所以 $S_{16} = \frac{(a_1+a_{16}) \times 16}{2} < 0$, 所以 $a_1+a_{16} <$

0 , 所以 $a_8+a_9 < 0$, 所以 $a_9 < 0$, 且 $0 < a_8 < -a_9$, 所以 $a_8^2 < (-a_9)^2 =$

a_9^2 , 故 B 错误. 对于 C, 因为 $a_1+a_2=1, a_3+a_4=9$, 所以 $2a_1+d=$

$1, 2a_1+5d=9$, 解得 $a_1 = -\frac{1}{2}, d=2$, 又 $a_1 > 0$, 不合题意, 舍去,

故 C 错误. 对于 D, 因为 $a_8=S_{10}$, 所以 $a_8 = \frac{a_1+a_{10}}{2} \times 10 = 5(a_1+$

$a_{10})$, 即 $d = -\frac{9a_1}{38}$, 所以 $S_9 = \frac{(a_1+a_9) \times 9}{2} = 9a_5 = 9(a_1+4d) =$

$9\left(a_1 - \frac{18a_1}{19}\right) = \frac{9a_1}{19} > 0, S_{10} = a_8 = a_1+7d = a_1 - \frac{63}{38}a_1 = -\frac{25}{38}a_1 < 0$, 故

D 正确. 故选 AD.

7. -2 9 (答案不唯一, 可以填 $[8, 10]$ 中任意一个实数)

命题点 ⊙ 等差数列的通项公式与前 n 项和公式

【解析】 由已知可得 $S_6 = \frac{6(a_1+a_6)}{2} = 3a_1+3a_6$, 代入 $S_6 = 6a_6+$

30 , 得 $3a_1+3a_6 = 6a_6+30$, 化简得 $a_1-a_6 = 10$.

又 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_6 = a_1+5d$, 两式联立, 解得 $d = -2$

(另解: 由等差数列前 n 项和公式得 $S_6 = 6a_1+15d = 6(a_1+5d)-15d$, 所以 $S_6 = 6a_6+30 = 6a_6-15d$, 从而解得 $d = -2$).

若 $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq S_5$ 恒成立, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和在 $n=5$ 时取得最大值, 结合 $d = -2 < 0$, 可知必须满足 $a_5 \geq 0$ 且 $a_6 \leq 0$,



即 $\begin{cases} a_1 + 4d \geq 0, \\ a_1 + 5d \leq 0, \end{cases}$ 解得 $8 \leq a_1 \leq 10$, 即 a_1 的取值范围是 $[8, 10]$.

所以符合条件的 a_1 的一个取值可以填 $[8, 10]$ 中任意一个实数.

8.5 $240\left(3 - \frac{n+3}{2^n}\right)$ 命题点 ① 数列的通项公式及错位相减法

求和

【解析】记对折 n 次可以得到不同规格图形的种数为数列 $\{a_n\}$, 依题意有 $a_1 = 2, a_2 = 3$, 对折 3 次, 可以得到 $2.5 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}, 5 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}, 10 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}, 20 \text{ dm} \times 1.5 \text{ dm}$ 四种规格的图形, 即 $a_3 = 4$; 对折 4 次, 可以得到 $1.25 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}, 2.5 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}, 5 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}, 10 \text{ dm} \times 1.5 \text{ dm}, 20 \text{ dm} \times 0.75 \text{ dm}$ 五种规格的图形, 即 $a_4 = 5$. 于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + 1$. 记对折 n 次可以得到不同规格图形的面积之和为 $\{S_n\}$, 依题意有 $S_1 = 2 \times 120 = 240, S_2 = 3 \times 60 = 180, S_3 = 4 \times 30 = 120, S_4 = 5 \times 15 = 75$, 于是数列 $\{S_n\}$ 的通项公式为 $S_n = 120(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n S_k = 120 \left[2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + (n+1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right],$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k = 120 \left[2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right],$$

两式作差得,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k &= 120 \left[2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 1 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + 1 \times \frac{1}{2^{n-1}} - (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right] \\ &= 120 \left[2 + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right] = 120 \left[3 - \frac{1}{2^{n-1}} - (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right] = 120 \left(3 - \frac{n+3}{2^n} \right), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n S_k = 240 \left(3 - \frac{n+3}{2^n} \right).$$

9. 命题点 ② 根据递推公式求通项, 错位相减法求和

【解】(1) 因为 $4S_n = 3a_n + 4$, 所以 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 4$, 两式相减得 $4a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n$, 即 $a_{n+1} = -3a_n$ 2 分

又因为 $4S_1 = 3a_1 + 4$, 所以 $a_1 = 4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 -3 的等比数列. 4 分

所以 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$ 5 分

(2) 方法一: 由 (1) 及题意得, $b_n = (-1)^{n-1} na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n = 4(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1})$, 8 分

$3T_n = 4(1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n)$, 两式相减可得

$$\begin{aligned} -2T_n &= 4(1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n) = 4 \left(\frac{1-3^n}{1-3} - n \cdot 3^n \right) = \\ &= (2-4n)3^n - 2, \end{aligned} \text{ 11 分}$$

所以 $T_n = (2n-1)3^n + 1$ 12 分

方法二: 由 (1) 及题意, 得 $b_n = (-1)^{n-1} na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $T_n = T_{n-1} + 4n \cdot 3^{n-1}$, 两边同时减去 $(2n-1)3^n$, 得 $T_n - (2n-1)3^n = T_{n-1} - (2n-3)3^{n-1}$, 故 $\{T_n - (2n-1)3^n\}$ 为常数列. 9 分

所以 $T_n - (2n-1)3^n = T_1 - (2 \times 1 - 1) \cdot 3 = 1$, 所以 $T_n = (2n-1)3^n + 1$,



$n \geq 2$ 当 $n=1$ 时, $T_1 = b_1 = 4$, 满足上式, 所以 $T_n = (2n-1)3^n + 1$.

..... 12 分

10. 必刷方法 ①利用 a_n 与 S_n 的关系求通项、裂项相消法求和

【解】(1) 因为 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n - 1$, 所以 $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} - 1$,
两式相减得 $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$.

因为 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2$.

又当 $n=1$ 时, $(a_1 - 1)^2 = 0$, 所以 $a_1 = 1$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 即 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$.

(2) 由 (1) 知 $a_n = 2n-1$, 则 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$,

即 $b_n = \frac{S_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right] =$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$.

故 $T_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{4} +$
 $\frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{4} + \frac{n}{8n+4} = \frac{n^2+n}{4n+2}$.

11. 命题点 ①数列通项公式的求解、错位相减法求和

【解】(1) $2S_n = na_n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ ②,

由 ①-② 得, $2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,

即 $(n-1)a_{n-1} = (n-2)a_n$.

当 $n=2$ 时, $a_1 = 0$;

当 $n \geq 3$ 时, $\frac{a_{n-1}}{n-2} = \frac{a_n}{n-1}$.

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\left\{ \frac{a_n}{n-1} \right\}$ 为常数列,

$\therefore \frac{a_n}{n-1} = \frac{a_2}{1} = 1, \therefore a_n = n-1 (n \geq 2)$.

由 $2S_n = na_n$, 当 $n=1$ 时, $2a_1 = a_1, a_1 = 0 = 1-1$.

$\therefore a_n = n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 5 分

一题多解 (1) 当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_1$, 即 $2a_1 = a_1, \therefore a_1 = 0$.

当 $n \geq 2$ 时, 由 $2S_n = na_n$, ①

得 $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$, ②

①-② 得 $2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,

整理得 $(n-2)a_n = (n-1)a_{n-1}$,

$\therefore a_2 = 1, \therefore$ 当 $n \geq 3$ 时, $a_n \neq 0, \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n-2} (n \geq 3)$, 3 分

当 $n \geq 3$ 时,

由累乘法得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} = \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdots \frac{2}{1}$,

$\therefore \frac{a_n}{a_2} = n-1$.

又 $a_2 = 1, \therefore a_n = n-1 (n \geq 3)$,

当 $n=1, n=2$ 时, $a_1 = 0, a_2 = 1$ 满足上式,

故 $a_n = n-1$ 5 分



(2) 由(1)知, $\frac{a_{n+1}}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ③,$$

$$\frac{1}{2}T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad ④,$$

$$\text{由③-④得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\therefore T_n = 2 - (2+n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

12. 命题点 ⊙ 等差数列的通项公式、前 n 项和及判断

【证明】若选条件①②, 则证明③:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$\because$ 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, $\therefore 2\sqrt{S_2} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}$,

$$\therefore 2\sqrt{2a_1+d} = \sqrt{a_1} + \sqrt{3a_1+3d}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

两边平方整理得 $4a_1+d = 2\sqrt{3a_1(a_1+d)}$,

$$\therefore (4a_1+d)^2 = [2\sqrt{3a_1(a_1+d)}]^2, \therefore (2a_1-d)^2 = 0, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore d = 2a_1, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore a_2 = a_1 + d = 3a_1. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

若选条件①③, 则证明②:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_2 = a_1 + d = 3a_1$,

$$\therefore d = 2a_1. \therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2a_1, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \sqrt{S_n} = n\sqrt{a_1}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = (n+1)\sqrt{a_1} - n\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1} \text{ (常数)}, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore$ 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 $\sqrt{a_1}$ 为首项, $\sqrt{a_1}$ 为公差的等差数列.

$$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

若选条件②③, 则证明①:

$\because$ 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, $a_2 = 3a_1$,

$$\therefore \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{4a_1} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)\sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1}, \therefore S_n = n^2a_1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2a_1 - (n-1)^2a_1 = (2n-1)a_1,$$

$$\text{对于 } n=1 \text{ 也成立, } \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = (2n+1)a_1 - (2n-1)a_1 = 2a_1 \text{ (常数)}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 是等差数列. } \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

13. 命题点 ⊙ 等差数列基本量的运算及通项公式、前 n 项和公式

【解】(1) 由 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 得 $3(a_1 + d) = 3a_1 + a_1 + 2d$,



整理得 $a_1 = d$, 所以 $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$ 2 分

由 $S_3 + T_3 = 21$, 得 $d + 2d + 3d + \frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} = 21$,

整理得 $2d^2 - 7d + 3 = 0$, 解得 $d = 3$ 或 $d = \frac{1}{2}$ (舍), 5 分

故 $a_n = 3n$ 6 分

(2) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列, 则 $b_1 + b_3 = 2b_2$,

即 $\frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} = 2 \times \frac{6}{a_2}$, 所以 $a_2 a_3 + 6a_1 a_2 = 6a_1 a_3$,

所以 $(a_1 + d)(a_1 + 2d) + 6a_1(a_1 + d) = 6a_1(a_1 + 2d)$,

整理得 $a_1^2 - 3a_1 d + 2d^2 = 0$, 解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$ 8 分

① 若 $a_1 = d$, 则 $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$,

由 $S_{99} - T_{99} = 99$, 得 $50d - \frac{51}{d} = 1$, 即 $50d^2 - d - 51 = 0$,

解得 $d = -1$ (舍) 或 $d = \frac{51}{50}$; 10 分

② 若 $a_1 = 2d$, 则 $a_n = (n+1)d, b_n = \frac{n}{d}$,

由 $S_{99} - T_{99} = 99$, 得 $51d - \frac{50}{d} = 1$, 即 $51d^2 - d - 50 = 0$,

解得 $d = 1$ (舍) 或 $d = -\frac{50}{51}$ (舍).

综上, $d = \frac{51}{50}$ 12 分

一题多解 (2) 设 $a_n = dn + b, b_n = kn + t$,

则 $(dn + b)(kn + t) = n^2 + n$,

即 $dkn^2 + (dt + kb)n + bt = n^2 + n$,

所以 $\begin{cases} dk = 1, \\ dt + kb = 1, \\ bt = 0. \end{cases}$

又 $S_{99} - T_{99} = 99$, 即 $a_{50} - b_{50} = 1$ 8 分

① 当 $b = 0$ 时, 则 $\begin{cases} dk = 1, \\ dt = 1, \\ 50d - (50k + t) = 1, \end{cases}$ 得 $50d^2 - (50kd + td) =$

d , 即 $50d^2 - 51 = d$, 解得 $d = \frac{51}{50}$ 或 $d = -1$ (舍); 10 分

② 当 $t = 0$ 时, 则 $\begin{cases} dk = 1, \\ kb = 1, \\ (50d + b) - 50k = 1, \end{cases}$ 得 $(50dk + bk) - 50k^2 =$

k , 即 $51 - 50k^2 = k$, 解得 $k = 1$ 或 $k = -\frac{51}{50}$,

则 $d = 1$ 或 $d = -\frac{50}{51}$, 此时均不满足 $d > 1$.

易错点

综上, $d = \frac{51}{50}$ 12 分



14. 命题点 ①等差与等比数列的通项公式, 错位相减法求和, 数列与排列组合的综合应用

(1) 【解】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{则有} \begin{cases} 2+d=2q+1, \\ 2+2d=2q^2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} d=3, \\ q=2, \end{cases} \text{或} \begin{cases} d=-1, \\ q=0 \end{cases} \text{(舍)}, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

故 $a_n = 3n-1, b_n = 2^n$. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) ①【证明】第一步: 设出 c_n, S_n , 结合 $a_n > 0, b_n > 0$ 将问题转化为证明 $S_n < a_{n+1}b_{n+1}$.

令 $c_n = a_n b_n = (3n-1) \cdot 2^n$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

因为 $a_n > 0, b_n > 0$, 所以要证 $\forall t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1}b_{n+1}$, 即证 $S_n < a_{n+1}b_{n+1}$ (提示: 当 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$ 时, T_n 中的元素取最大值, 即最大元素为 S_n). $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

第二步: 根据错位相减法求出 S_n .

$$S_n = 2 \times 2 + 5 \times 2^2 + 8 \times 2^3 + \dots + (3n-1) \times 2^n \text{ ①},$$

$$2S_n = 2 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + 8 \times 2^4 + \dots + (3n-4) \times 2^n + (3n-1) \times 2^{n+1} \text{ ②},$$

$$\text{①}-\text{②} \text{得}, -S_n = 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + 3 \times 2^n - (3n-1) \times 2^{n+1} =$$

$$4 + 3 \times \frac{4-2^{n+1}}{1-2} - (3n-1) \times 2^{n+1} = -8 + (4-3n) \times 2^{n+1}.$$

$$\text{所以 } S_n = 8 + (3n-4) \times 2^{n+1}. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

第三步: 将问题转化为证明 $3 \times 2^{n-1} > 1$ 即可得证.

即证 $8 + (3n-4) \times 2^{n+1} < (3n+2) \times 2^{n+1}$, 即证 $6 \times 2^{n+1} > 8$, 即证 $3 \times 2^{n-1} > 1$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $2^{n-1} \geq 1$, 所以 $3 \times 2^{n-1} > 1$ 恒成立. $\dots\dots 8 \text{分}$

所以 $S_n < a_{n+1}b_{n+1}$, 故 $\forall t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1}b_{n+1}$. $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

②【解】第一步: 分别求出当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 $0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ 个 1 时元素之和.

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 0 个 1 时, 此时元素之和为 0;

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 1 个 1 时, 此时元素之和为 S_n ;

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 2 个 1 时, 此时元素之和为 $(n-1)S_n = C_{n-1}^1 \cdot S_n$;

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 3 个 1 时, 此时元素之和为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2} S_n = C_{n-1}^2 \cdot S_n$;

$\dots\dots$

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 $(n-1)$ 个 1 时, 此时元素之和为 $C_{n-1}^{n-2} \cdot S_n$;

当 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中有 n 个 1 时, 此时元素之和为 S_n . $\dots\dots 13 \text{分}$

第二步: 求出上述元素的总和即可得解.

故 T_n 中所有元素之和为 $C_{n-1}^0 \cdot S_n + C_{n-1}^1 \cdot S_n + C_{n-1}^2 \cdot S_n + \dots + C_{n-1}^{n-2} \cdot S_n + C_{n-1}^{n-1} \cdot S_n = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) \cdot S_n = 2^{n-1} \cdot S_n = 2^{n+2} + (3n-4) \cdot 2^{2n}$. $\dots\dots\dots 15 \text{分}$

15. 必刷题型 ①等差数列的判定、数列的奇偶项问题、数列与导数的综合问题

【解】(1) 等式 $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$ 两边同时除以 $n(n+1)$, 得

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1, \text{又} \frac{a_1}{1} = 1, \text{所以数列} \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \text{是以} 1 \text{为首项,}$$

1 为公差的等差数列. 所以 $\frac{a_n}{n} = n$, 即 $a_n = n^2$.



(2) 由(1)知, $b_n = (-1)^n n^2$.

当 n 为偶数时, $S_n = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + [n^2 - (n-1)^2] =$

$$3 + 7 + \cdots + (2n-1) = \frac{3 + (2n-1)}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1).$$

当 n 为奇数 ($n \geq 3$) 时, $S_n = S_{n-1} + (-1)^n n^2 = \frac{1}{2}(n-1)n - n^2 =$
 $-\frac{1}{2}n(n+1)$, 当 $n=1$ 时, $S_1 = -1$ 也符合上式.

综上, $S_n = (-1)^n \frac{1}{2}n(n+1)$.

(3) 当 $n=1$ 时, $a_1 c_1 = 3$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n c_n = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n - (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots +$
 $a_{n-1} c_{n-1}) = \frac{n^2 - n + 1}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{(n-1)^2 - (n-1) + 1}{2} \cdot 3^n = n^2 \cdot 3^n,$

又 $a_1 c_1 = 3$ 符合上式, 所以 $a_n c_n = n^2 \cdot 3^n$, 又 $a_n = n^2$, 所以 $c_n = 3^n$.

记 $\frac{na_n}{c_n} = d_n$, 则 $d_n = \frac{n^3}{3^n}$.

当 $n=1$ 时, $d_1 = \frac{1}{3}$, 当 $n=2$ 时, $d_2 = \frac{8}{9}$, 当 $n=3$ 时, $d_3 = 1$, 令

$f(x) = 3^{\frac{x}{3}} - x, x \geq 3$, 则 $f'(x) = \frac{\ln 3}{3} 3^{\frac{x}{3}} - 1 \geq \ln 3 - 1 > 0$, 所以

$f(x)$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x) \geq f(3) = 0$, 即

$3^{\frac{x}{3}} \geq x$, 即 $3^x \geq x^3$.

所以当 $x \geq 4$ 时, $3^x > x^3$, 即 $\frac{x^3}{3^x} < 1$, 可知数列 $\{d_n\}$ 从第 4 项开始每一项均小于 1.

综上, $\left\{\frac{na_n}{c_n}\right\}$ 的最大项为 1.

16. 必刷题型 ⊙ 数列与集合的综合问题、新定义问题

(1) 【解】① 由 $A_1 = \{a_1\} = \{1\}$, 得 $B_1 = 1, S_1 = 1$, 所以 $C_1 =$
 $\frac{B_1 + 1}{S_1} = 2$;

由 $A_2 = \{a_1, a_2\} = \{1, 2\}$, 得 $B_2 = 3, S_2 = \sum_{i=1}^{B_2} b_i = 6$, 所以

$$C_2 = \frac{B_2 + 1}{S_2} = \frac{2}{3};$$

由 $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 3\}$, 得 $B_3 = 7, S_3 = \sum_{i=1}^{B_3} b_i = 24$,

$$\text{所以 } C_3 = \frac{B_3 + 1}{S_3} = \frac{1}{3}.$$

② 由题意得集合 $A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, 所以 $B_n = 2^n - 1$.

方法一 (利用子集构成特点): 由于集合 A_n 的每个元素在其非空子集中出现的次数均为 2^{n-1} ,

$$\text{故 } S_n = (1 + 2 + \cdots + n) \cdot 2^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{n(n+1)}{4} \cdot 2^n,$$

$$\text{所以 } C_n = \frac{B_n + 1}{S_n} = \frac{4 \cdot 2^n}{n(n+1) \cdot 2^n} = \frac{4}{n(n+1)} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{所以 } T_n = 4 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1}.$$



方法二(利用递推关系):当 $n \geq 2$ 时,将集合 A_n 拆分为集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 与 $\{n\}$,

集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的所有非空子集中的元素之和的和为 $S_{n-1} (n \geq 2)$,

集合 A_n 的所有非空子集中的元素之和的和为 S_n 与集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的所有子集中的元素加上 n 的和,

集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 共有 2^{n-1} 个子集,所以 $S_n = S_{n-1} + S_{n-1} + n \cdot 2^{n-1} = 2S_{n-1} + n \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$,

即 $\frac{S_n}{2^n} = \frac{S_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n}{2}$, 则 $\frac{S_n}{2^n} - \frac{S_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{n}{2} (n \geq 2)$, 易得 $\frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$, 累加

得 $\frac{S_n}{2^n} - \frac{S_1}{2} = \frac{2+3+\dots+n}{2} (n \geq 2)$,

所以 $\frac{S_n}{2^n} = \frac{n(n+1)}{4} (n \geq 2)$, 所以 $S_n = \frac{n(n+1)}{4} \cdot 2^n (n \geq 2)$, 当

$n=1$ 时也符合上式,故 $S_n = \frac{n(n+1)}{4} \cdot 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以 $C_n = \frac{B_n+1}{S_n} = \frac{4 \cdot 2^n}{n(n+1) \cdot 2^n} = \frac{4}{n(n+1)} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

所以 $T_n = 4 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1}$.

(2)【证明】由题意所述的变换 $\sum_{i=1}^5 a_i$ 不变,且 $\sum_{i=1}^5 a_i$ 始终为整数,所以 $\sum_{i=1}^5 a_i \geq 1$.

构造一个函数 $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_3 - a_5)^2 + (a_4 - a_1)^2 + (a_5 - a_2)^2$.

不妨对 a_5, a_1, a_2 进行一次操作 ($a_1 < 0$), 此时五边形顶点上的数变为 $-a_1, a_2 + a_1, a_3, a_4, a_5 + a_1$,

所以有 $f(-a_1, a_2 + a_1, a_3, a_4, a_5 + a_1) - f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$
 $= (-a_1 - a_3)^2 + (a_1 + a_2 - a_4)^2 + [a_3 - (a_5 + a_1)]^2 + [a_4 - (-a_1)]^2 +$
 $[(a_5 + a_1) - (a_1 + a_2)]^2 - (a_1 - a_3)^2 - (a_2 - a_4)^2 - (a_3 - a_5)^2 -$
 $(a_4 - a_1)^2 - (a_5 - a_2)^2$
 $= 2a_1(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5).$

因为 $a_1 < 0, a_1 \in \mathbf{Z}$, 所以 $a_1 \leq -1$. 又 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 1$, 所以 $2a_1(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \leq 2a_1 \leq -2$,

则经过每一次变换,函数 $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 的值至少减少 2, 且 $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 恒非负, 所以变换只能进行有限多次.

关键点拨

第(2)问的关键是由题意知每次变换 $\sum_{i=1}^5 a_i$ 不变,再构造一个函数 $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_3 - a_5)^2 + (a_4 - a_1)^2 + (a_5 - a_2)^2$, 证明经过每一次变换,函数 $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 的值至少减少 2, 且 $f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 恒非负, 说明 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 之间的差值越来越小, 又其和为正, 所以变换只能进行有限多次, 使得正五边形各顶点上的数均为非负.

题组 2

1. B 命题点 ① 数列的单调性及充分、必要条件的判断



【解析】当 $q=1$ 时, $S_n=na_1$, 只有当 $a_1>0$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 才是递增数列, 故甲不是乙的充分条件; 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 $S_n-S_{n-1}>0$ 对任意 $n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立, 即 $a_n=a_1q^{n-1}>0 (n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立, 所以 $a_1>0, q>0$, 因此甲是乙的必要条件. 故甲是乙的必要条件但不是充分条件, 故选 B.

方法速记 数列 $\{a_n\}$ 单调性的判断方法:

(1) 若 $a_n-a_{n-1}>0 (n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立, 则数列 $\{a_n\}$ 是递增数列; (2) 若 $a_n-a_{n-1}<0 (n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立, 则数列 $\{a_n\}$ 是递减数列; (3) 若 $a_n-a_{n-1}=0 (n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立, 则数列 $\{a_n\}$ 是常数列.

2. C 命题点 ① 数列基本量的求解

【解析】由 $S_{2n}-S_n=n$, 可得 $S_8-S_4=4, S_6-S_3=3, S_4-S_2=2$, 所以 $a_3+a_4=2$. 又因为 $a_3=6$, 所以 $a_4=-4$. 又因为 $a_7+a_8=S_8-S_6$, 所以 $a_7+a_8=(S_8-S_4)-(S_6-S_4)=4-(S_6-S_3-a_4)=4-(3-a_4)=1+(-4)=-3$. 故选 C.

3. A 必刷题型 ① 等比数列的通项、累加法求数列中的项

【解析】 $\because a_1=0, a_2=1, \{a_n+a_{n+1}\}$ 是公比为 2 的等比数列, $\therefore a_n+a_{n+1}=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}, \therefore a_{n+1}+a_{n+2}=2^n$, 两式相减可得 $a_{n+2}-a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}, \therefore a_{2024}=(a_{2024}-a_{2022})+(a_{2022}-a_{2020})+\cdots+(a_4-a_2)+a_2=2^{2021}+2^{2019}+\cdots+2^1+1=\frac{2\times(1-4^{1011})}{1-4}+1=\frac{2^{2023}+1}{3}$ (提示: 累加法). 故选 A.

4. C 命题点 ① 数列的单调性与最值

【解析】要求 $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$ 的 n 的最大值, 那么 $a_1=3$, 且 $\{a_k\} (k=1, 2, \cdots, n-1, n\in\mathbf{N}^*)$ 是公差为 1 的等差数列 (提示: 递增数列 $\{a_n\}$ 各项均为整数), 通项 $a_k=k+2$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=\frac{(n-1)(n+4)}{2}$, 令 $\frac{(n-1)(n+4)}{2}\leq 100$, 得 $n\leq 12$, 当 $n=12$ 时, $a_{n-1}=13, a_n=12$, 不满足题意. 当 $n=11$ 时, $a_{n-1}=12, a_n=25$, 满足题意. 综上, n 的最大值为 11. 故选 C.

5. C 必刷考点 ① 等差数列的基本量计算

【解析】设 $S_n=An^2+Bn (A, B$ 为常数, 且 $A\neq 0)$, 则 $S_3=9A+3B, S_4=16A+4B, S_7=49A+7B$,

又 $\frac{S_7S_3}{S_4^2}=\frac{7}{4}$, 所以 $\frac{(49A+7B)(9A+3B)}{(16A+4B)^2}=\frac{7}{4}$, 整理得 $A^2+2AB+B^2=0$, 即 $(A+B)^2=0$, 解得 $B=-A$, 故 $S_n=An^2-An=An(n-1)$,

因此 $S_3=A\cdot 3\times 2=6A, S_4=A\cdot 4\times 3=12A$, 故 $\frac{S_3}{S_4}=\frac{6A}{12A}=\frac{1}{2}$.

6. B 命题点 ① 等差数列、三角函数的周期性、集合中元素的性质

【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$, 即 $a_{n+3k}=a_n+3k\times$

$\frac{2\pi}{3}=a_n+2k\pi, k\in\mathbf{N}^*$, 所以 $\cos a_{n+3k}=\cos a_n$, 所以集合 $S=$

$\{\cos a_n | n\in\mathbf{N}^*\}=\{\cos a_n | n=1, 2, 3\}=\{a, b\}$, 因此 a_1, a_2, a_3

中有两个数的余弦值相等. 满足 $y=\cos x=\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的 y 只



有 $y = \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$ 或 $y = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$, 两种情况对应第三个数的余弦值分别为 $\cos \pi = -1$ 或 $\cos 2\pi = 1$, 因此 $ab = \frac{1}{2} \times (-1)$ 或 $ab = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1$, 均有 $ab = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

一题多解

由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$, 可知 $\cos a_{n+3} = \cos\left(a_n + \frac{2\pi}{3} \times 3\right) = \cos a_n$, 所以数列 $\{\cos a_n\}$ 是周期为 3 的数列, 所以 $\cos a_1, \cos a_2 = \cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \cos a_3 = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$ 为一个周期的三项. 由 $S = \{a, b\}$ 可知 S 中只有两个元素, 则 $\cos a_1 = \cos a_2$ 或 $\cos a_1 = \cos a_3$ 或 $\cos a_2 = \cos a_3$.

①若 $\cos a_1 = \cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right)$, 即 $\cos a_1 = -\frac{1}{2}\cos a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_1$,

$$\text{可得} \begin{cases} \cos a_1 = \frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \cos a_1 = -\frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

此时 $\cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_1 = -1$ 或 1 ,

则 $S = \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$ 或 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, 则 $ab = -\frac{1}{2}$.

②同理若 $\cos a_1 = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$,

$$\text{可得} \begin{cases} \cos a_1 = \frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \cos a_1 = -\frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

此时 $\cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_1 = -1$ 或 1 ,

则 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ 或 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, 则 $ab = -\frac{1}{2}$.

③同理若 $\cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$,

$$\text{可得} \begin{cases} \cos a_1 = 1, \\ \sin a_1 = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \cos a_1 = -1, \\ \sin a_1 = 0 \end{cases}$$

此时 $\cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$,

则 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ 或 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, 则 $ab = -\frac{1}{2}$.

综上, 可知 $ab = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

7. A 必刷考点 ①由递推关系证明等比数列并求其前 n 项和

【解析】通过对数变换将递推式进行转化, 发现 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 进而可求其前 6 项和. 对于 $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}^2$, 等



号两边同时取对数得 $\log_2 a_{n+1} = \log_2 (a_n \cdot a_{n-1}^2) = \log_2 a_n + \log_2 a_{n-1}^2 = \log_2 a_n + 2\log_2 a_{n-1} (n \geq 2)$.

设 $c_n = \log_2 a_n$, 则 $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1} (n \geq 2)$,

$b_n = \log_2 (a_n a_{n+1}) = c_n + c_{n+1} = c_n + c_n + 2c_{n-1} = 2(c_n + c_{n-1}) = 2b_{n-1} (n \geq 2)$,

又 $b_1 = \log_2 (a_1 a_2) = \log_2 2 = 1$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$, $S_6 = \frac{1 \times (1-2^6)}{1-2} = 63$.

8.24 命题点 ⊙ 等差数列的通项公式及前 n 项和公式

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 易知 $a_4 = a_1 + 3d$, 将 $a_1 = -1, a_4 = 5$ 代入可得 $-1 + 3d = 5$, 解得 $d = 2$ (另解: 由等差数列

的性质可知, $a_4 - a_1 = 3d$, 所以 $d = 2$). 故 $S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 6 \times (-1) + 15 \times 2 = 24$.

9. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 命题点 ⊙ 等差数列的前 n 项和、数列的单调性

【解析】由等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 0$, 公差为 d , 得前 n 项和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 - \frac{d}{2}n$, 且 $S_1 = a_1 = 0, S_2 = d, S_3 = 3d$ (另解: $a_2 = d, a_3 = 2d$, 则 $S_2 = a_1 + a_2 = d, S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3d$). 因为 $a_1 = 0$, 且要求 S_n 在区间 $(0, 1)$ 内至少有两项, 所以 $d > 0$ (提示: 否则, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n \leq 0, S_n$ 中不会有项在区间 $(0, 1)$ 内),

$\{S_n\}$ 为递增数列且 $S_2, S_3 \in (0, 1)$, 故 $\begin{cases} d > 0, \\ 0 < d < 1, \\ 0 < 3d < 1, \end{cases}$ 解得 $0 < d < \frac{1}{3}$, 即 d 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

10.23 $\frac{115}{2}$ 命题点 ⊙ 等比数列、圆柱的体积

【解析】设升量器的高为 h_1 , 底面半径为 r_1 , 容积为 V_1 , 斗量器的高为 h_2 , 底面半径为 r_2 , 容积为 V_2 , 斛量器的高为 h_3 , 底面半径为 r_3 , 容积为 V_3 , 则 $r_1 = \frac{65}{2}$ mm, $r_2 = \frac{325}{2}$ mm, $r_3 = \frac{325}{2}$ mm, $h_3 = 230$ mm,

$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi h_1$ (mm³), $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi h_2$ (mm³),

$V_3 = \pi r_3^2 h_3 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi$ (mm³).

$\because V_1, V_2, V_3$ 成等比数列且公比 $q = 10$, $\therefore V_1 \cdot q^2 = V_3$, 即 $\left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi \cdot h_1 \cdot 100 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi$, 解得 $h_1 = \frac{115}{2}$ mm, $V_2 \cdot q =$

V_3 , 即 $\left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi \cdot h_2 \cdot 10 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi$, 解得 $h_2 = 23$ mm.

$\therefore$ 斗量器的高 $h_2 = 23$ mm, 升量器的高 $h_1 = \frac{115}{2}$ mm.

11. $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ 命题点 ⊙ 数列的新定义

【解析】由题意得, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n-3} = n^2 - n$ ②,



①-②得, $a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 2n$,

令 $b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 2n$,

若 $k = 3n - 2$, 则在 $a_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}, a_{3n+1}, \dots, a_{3n+6}$ 这 9 项中, 含有 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 3 项;

则 $q^3 = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}$, 且 $q^3 = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}$, 而 $\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1}{n}$ 无解, 此时不符合题意;

若 $k = 3n - 1$, 则在 $a_{3n-1}, a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots, a_{3n+7}$ 这 9 项中, 含有 b_{n+1}, b_{n+2} 2 项, $q^3 = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, 易知 $y = 1 + \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故当 $n = 1$ 时, $(q^3)_{\max} = \frac{3}{2}$, 即 $q \leq$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}};$$

若 $k = 3n$, 则在 $a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+3}, \dots, a_{3n+8}$ 这 9 项中, 含有 b_{n+1}, b_{n+2} 2 项, $q^3 = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}$, 同理 $q \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

综上所述, q 的最大值为 $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

12. 命题点 ⊙ 等差数列与等比数列的通项公式

(1) 【证明】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则由 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3$, 得 $a_3 - a_2 = b_3 - b_2$, 即 $d = b_1 q^2 - b_1 q = 2b_1$ ①. 2 分

又由 $a_2 - b_2 = b_4 - a_4$, 得 $a_4 + a_2 = b_4 + b_2$, 即 $2a_1 + 4d = b_1 q^3 + b_1 q = 10b_1$ ②. 4 分

将①代入②, 得 $2a_1 + 8b_1 = 10b_1$, 即 $a_1 = b_1$ 5 分

(2) 【解】由 (1) 可得 $a_m = a_1 + (m-1)d = b_1 + (m-1) \cdot 2b_1 = 2mb_1 - b_1$ 6 分

又 $b_k = b_1 q^{k-1} = b_1 \cdot 2^{k-1}$,

则由 $b_k = a_m + a_1$, 得 $b_1 \cdot 2^{k-1} = 2mb_1 - b_1 + a_1 = 2mb_1 - b_1 + b_1 = 2mb_1$, 即 $2^{k-1} = 2m$, 所以 $2^{k-2} = m$ 8 分

由 $1 \leq 2^{k-2} \leq 500$, 得 $0 \leq k-2 < 9$, 即 $2 \leq k < 11$.

因为 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$,

所以集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中元素的个数为 9.

..... 10 分

13. 命题点 ⊙ 数列的通项公式、数列求和

【解】(1) $b_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2, b_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 + 1 = 5$.

$\because 2n$ 为偶数, $\therefore a_{2n+1} = a_{2n} + 2, a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1$,

$\therefore a_{2n+2} = a_{2n} + 3$, 即 $b_{n+1} = b_n + 3$, 且 $b_1 = 2$, 3 分

$\therefore \{b_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列, $\therefore b_n = 3n - 1$.

..... 5 分

(2) 当 n 为奇数时, $a_n = a_{n+1} - 1$, $\therefore \{a_n\}$ 的前 20 项和为

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$$

$$= (a_1 + a_3 + \dots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$$

$$= [(a_2 - 1) + (a_4 - 1) + \dots + (a_{20} - 1)] + (a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$$

$$= 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{20}) - 10. 8 分$$

由 (1) 可知, $a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 2 \times 10 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 = 155$,



$\therefore \{a_n\}$ 的前 20 项和为 $2 \times 155 - 10 = 300$ 10 分

14. 必刷题型 ⊙ 等差数列的证明、裂项相消法求和

【证明】(1) 由 $S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n = 2^{n+1} + 2$, 得 $(S_{n+2} - S_{n+1}) - (S_{n+1} - S_n) = 2^{n+1} + 2$, 即 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2^{n+1} + 2$.

因为 $b_n = a_n - 2^n$, 所以 $(b_{n+2} + 2^{n+2}) - (b_{n+1} + 2^{n+1}) = 2^{n+1} + 2$, 所以 $b_{n+2} - b_{n+1} = 2$.

由 $a_3 - 2a_2 + a_1 = 2$, 得 $(b_3 + 2^3) - 2(b_2 + 2^2) + (b_1 + 2) = 2$, 整理得 $b_3 - 2b_2 + b_1 = 0$, 即 $b_3 - b_2 = b_2 - b_1$,

则 $b_{n+1} - b_n = 2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.

(2) 因为 $b_1 = a_1 - 2 = 1$, 所以 $b_n = 2n - 1$, 即 $\frac{1}{b_n b_{n+2}} =$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b_1 b_3} + \frac{1}{b_2 b_4} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$< \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

15. 命题点 ⊙ 等差数列的证明、数列的递推关系及通项公式

(1) 【证明】当 $n=1$ 时, $b_1 = S_1$, 则 $\frac{2}{b_1} + \frac{1}{b_1} = 2$, 则 $b_1 = \frac{3}{2}$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, 代入 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ 得 $\frac{2b_{n-1}}{b_n} + \frac{1}{b_n} = 2$,

则 $2b_n = 2b_{n-1} + 1$, 所以 $b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2} (n \geq 2)$ 3 分

故数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列. 5 分

(2) 【解】由 (1) 得 $b_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n + 1$.

当 $n=1$ 时, $S_1 = b_1 = \frac{3}{2}$;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}n + 1}{\frac{1}{2}(n-1) + 1} = \frac{n+2}{n+1},$$

由 $S_1 = \frac{3}{2}$ 满足上式, 得 $S_n = \frac{n+2}{n+1}$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$; 9 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, 11 分

因为 $a_1 = \frac{3}{2}$ 不满足上式 (易错: 注意验证 $n=1$ 是否满足

$$a_n = -\frac{1}{n(n+1)}) \text{, 故 } a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, n=1, \\ -\frac{1}{n(n+1)}, n \geq 2. \end{cases} \text{ 12 分}$$



16. 命题点 ①等比数列的通项公式、前 n 项和公式, 数列的构成, 等差数列的前 n 项和公式, 错位相减法求和

(1) 【解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$).

由 $a_1 = 1, S_2 = a_3 - 1$, 得 $1 + q = q^2 - 1$, 解得 $q = -1$ (舍去) 或 $q = 2$ 3 分

则 $a_n = 2^{n-1}, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 2^n - 1$ 4 分

(2) 由 (1) 知, $a_k = 2^{k-1}$.

$$\therefore b_n = \begin{cases} k, n = a_k, \\ b_{n-1} + 2k, a_k < n < a_{k+1}, \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}^*,$$

$\therefore$ 当 $n = 2^{k-1}$ 时, $b_n = k$, $\therefore$ 当 $k = 1$ 时, $b_1 = 1$; 当 $k = 2$ 时, $b_2 = 2$;

当 $k = 3$ 时, $b_4 = 3$; 当 $n = 3$, 即 $a_2 < n < a_3$ 时, $b_3 = b_2 + 2 \times 2 = 6$;

当 $k \geq 3$ 时, 由 $b_n = b_{n-1} + 2k, a_k < n < a_{k+1}$, 得当 $a_k \leq n < a_{k+1}$ 时,

$b_{2^{k-1}}, b_{2^{k-1}+1}, b_{2^{k-1}+2}, \dots, b_{2^{k-1}+2^{k-1}-1}$ 构成首项为 k , 公差为 $2k$, 项数为 2^{k-1} 的等差数列. 6 分

(i) 【证明】当 $n = a_{k+1} = 2^k$ ($k \in \mathbf{N}^*, k > 1$) 时, $b_n = k + 1, a_k = 2^{k-1}$,

当 $k = 2$ 时, $n = 4, b_4 = 3, b_{n-1} = b_3 = 6, a_2 = 2, b_{n-1} = a_k \cdot b_n$.

当 $k \geq 3$ 时, $b_{n-1} = k + 2k(2^{k-1} - 1) = 2^k k - k, a_k \cdot b_n = (k + 1) \cdot 2^{k-1}$,

$\therefore b_{n-1} - a_k \cdot b_n = k \cdot 2^k - k - k \cdot 2^{k-1} - 2^{k-1} = k \cdot 2^{k-1} - 2^{k-1} - k = (k-1)2^{k-1} - k \geq 4(k-1) - k = 3k - 4 > 0$,

$\therefore b_{n-1} - a_k \cdot b_n > 0$, 即 $b_{n-1} > a_k \cdot b_n$.

综上, 当 $n = a_{k+1}$ ($k \in \mathbf{N}^*, k > 1$) 时, $b_{n-1} \geq a_k \cdot b_n$ 9 分

(ii) 【解】 $\because b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 6, S_n = 2^n - 1$,

$\therefore$ 当 $n = 1$ 时, $S_1 = 1, \sum_{i=1}^{S_n} b_i = b_1 = 1$;

当 $n = 2$ 时, $S_2 = 3, \sum_{i=1}^{S_n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 = 9$; 10 分

当 $n \geq 3$ 时, $(b_4, b_5, b_6, b_7), (b_8, b_9, \dots, b_{15}), \dots, (b_{2^{n-1}}, b_{2^{n-1}+1}, \dots, b_{2^n-1})$ 构成了 $(n-2)$ 组等差数列, 且这 $(n-2)$ 组等差数列的首项分别为 $3, 4, \dots, n$, 公差分别为 $6, 8, \dots, 2n$, 项数分别为 $2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}$.

记每组等差数列所有项的和为 $T_p, p = 2, 3, \dots, n-1$, 则 $T_p =$

$$\frac{p+1+p+1+(2^p-1) \cdot 2(p+1)}{2} \cdot 2^p = (p+1) \cdot 4^p. \quad \dots \dots 12 \text{ 分}$$

则 $T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1} = 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3 + \dots + n \cdot 4^{n-1}$.

设 $P_n = 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3 + \dots + n \cdot 4^{n-1}$,

则 $4P_n = 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^4 + \dots + (n-1) \cdot 4^{n-1} + n \cdot 4^n$,

两式相减得 $-3P_n = 3 \cdot 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{n-1} - n \cdot 4^n =$

$$\left(\frac{1}{3} - n\right) \cdot 4^n + \frac{80}{3},$$

$\therefore P_n = \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{9}\right) 4^n - \frac{80}{9}, \therefore \sum_{i=1}^{S_n} b_i = \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{9}\right) 4^n - \frac{80}{9} + 9 =$

$\left(\frac{n}{3} - \frac{1}{9}\right) 4^n + \frac{1}{9}$ 14 分

当 $n = 1, 2$ 时, 均满足上式, $\therefore \sum_{i=1}^{S_n} b_i = \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{9}\right) 4^n + \frac{1}{9}$.

..... 15 分

17. 必刷题型 ①求等比数列的通项公式、前 n 项和, 累加法求数



列的通项

【解】(1) 由 $\{S_{n+2}-S_n\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 得 $S_{n+2}-S_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 则 $a_3+a_2 = \frac{3}{4}$, $a_4+a_3 = -\frac{3}{8}$, 而 $a_2 = -\frac{5}{2}$, 所以 $a_3 = \frac{13}{4}$, $a_4 = -\frac{29}{8}$.

(2) 在数列 $\{S_n\}$ 中, $S_1 = a_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2 = -\frac{3}{2}$, $S_{n+2}-S_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

当 $n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^*$ 时, $S_{2k+1}-S_{2k-1} = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k$,

$S_{2k+1}-S_1 = (S_3-S_1) + (S_5-S_3) + \cdots + (S_{2k+1}-S_{2k-1}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\frac{1}{4^k}}{1-\frac{1}{4}} =$

$1-\frac{1}{4^k}$, 则 $S_{2k+1} = 2-\frac{1}{2^{2k}}$,

当 n 为奇数, $n \geq 3$ 时, $S_n = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$, 当 $n=1$ 时, $S_1 = 1$, 满足上

式, 因此当 n 为奇数时, $S_n = 2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

当 $n = 2k, k \in \mathbf{N}^*$ 时, $S_{2k+2}-S_{2k} = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k$,

$S_{2k+2}-S_2 = (S_4-S_2) + (S_6-S_4) + \cdots + (S_{2k+2}-S_{2k}) = -\frac{3}{8} \cdot \frac{1-\frac{1}{4^k}}{1-\frac{1}{4}} =$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^k}$, 则 $S_{2k+2} = -2 + \frac{1}{2^{2k+1}}$,

当 n 为偶数, $n \geq 4$ 时, $S_n = -2 + \frac{1}{2^{n-1}}$, 当 $n=2$ 时, $S_2 = -\frac{3}{2}$, 满

足上式, 因此当 n 为偶数时, $S_n = -2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

所以 $\{S_n\}$ 的通项公式是 $S_n = (-1)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(3) 由(2)知, $S_n = (-1)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-1)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - (-1)^{n-2} \cdot$

$\left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) = (-1)^{n-1} \left(4 - \frac{3}{2^{n-1}}\right)$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$, 满足上式, 因此 $a_n = (-1)^{n-1} \left(4 - \frac{3}{2^{n-1}}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$,

则 $|S_n| - |a_n| = \left|2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right| - \left|4 - \frac{3}{2^{n-1}}\right| = \frac{2}{2^{n-1}} - 2 \leq 0$,

所以 $|S_n| \leq |a_n|$.



18. 必刷题型 ⊙ 等差数列、等比数列的通项公式, 错位相减法求和

【解】(1) 设 $x_n = a_n + b_n, y_n = a_n - b_n$, 用 x_n, y_n 分别表示 a_n, b_n , 结合已知条件列方程求解参数, 最终得到数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

设 $x_n = a_n + b_n, y_n = a_n - b_n$.

由题意知 $\{x_n\}$ 是公差为 2 的等差数列,

设其首项为 x_1 , 则 $x_n = x_1 + 2(n-1)$.

由 $\{y_n\}$ 是首项为 4 的等比数列, 设其公比为 q , 则 $y_n = 4q^{n-1}$.

由 $x_n = a_n + b_n, y_n = a_n - b_n$, 可得 $a_n = \frac{x_n + y_n}{2}, b_n = \frac{x_n - y_n}{2}$,

则 $a_1 = \frac{x_1 + 4}{2}, a_2 = \frac{x_1 + 2 + 4q}{2}$, 代入 $a_2 - 2a_1 = -1$, 得 $x_1 = 4q - 4$ ①;

$b_1 = \frac{x_1 - 4}{2}, b_2 = \frac{x_1 + 2 - 4q}{2}$, 代入 $b_2 - 2b_1 = -1$, 得 $x_1 + 4q = 12$ ②.

联立 ①② 得 $q = 2, x_1 = 4$, 因此 $x_n = 4 + 2(n-1) = 2n + 2, y_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 所以 $a_n = n + 1 + 2^n, b_n = n + 1 - 2^n$.

(2) 根据 (1) 得到 c_n 的表达式, 使用两次错位相减法求解数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

由 (1) 知 $a_n + b_n = 2n + 2, a_n - b_n = 2^{n+1}$, 因此 $c_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{a_n - b_n} = \frac{(2n+2)^2}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n-1}}$.

设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

则 $S_n = \frac{2^2}{2^0} + \frac{3^2}{2^1} + \frac{4^2}{2^2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{2^{n-1}}$,

$\frac{1}{2}S_n = \frac{2^2}{2^1} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{4^2}{2^3} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{2^n}$,

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n = 4 + \sum_{k=2}^n \frac{(k+1)^2 - k^2}{2^{k-1}} - \frac{(n+1)^2}{2^n} = 4 + \sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{2^{k-1}} - \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

令 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{2^{k-1}}$,

则 $T_n = 3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{2n+1}{2^{n-1}}$,

$\frac{1}{2}T_n = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2n+1}{2^n}$,

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n = 3 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n+1}{2^n} = 3 + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n+1}{2^n} = 5 - \frac{2n+5}{2^n}$,

故 $T_n = 10 - \frac{2n+5}{2^{n-1}}$, 因此 $\sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{2^{k-1}} = T_n - 3 = 7 - \frac{2n+5}{2^{n-1}}$,

于是, $\frac{1}{2}S_n = 4 + 7 - \frac{2n+5}{2^{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{2^n} = 11 - \frac{n^2 + 6n + 11}{2^n}$,

即数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 22 - \frac{n^2 + 6n + 11}{2^{n-1}}$.

(3) 不存在, 理由如下.

第一步: 分析 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的单调性, 从而确定 $a_s, a_{s+1}, b_t, b_{t+1}$

的大小关系.

对 $\{a_n\}$: $a_{n+1} - a_n = 1 + 2^n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_{s+1} > a_s > 0$ 对任意正整数 s 成立.

对 $\{b_n\}$: $b_{n+1} - b_n = 1 - 2^n < 0$, 因此 $\{b_n\}$ 是递减数列, 且 $b_1 = 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $b_n < 0$, 故 $b_{t+1} < b_t \leq 0 < a_s < a_{s+1}$.

第二步: 结合等差中项的性质列方程, 验证是否存在符合条件的正整数 s, t .

若 $a_s, a_{s+1}, b_t, b_{t+1}$ 可以按某种顺序构成等差数列, 则必有 $a_{s+1} + b_{t+1} = a_s + b_t$, 即 $a_{s+1} - a_s = b_t - b_{t+1}$, 即 $1 + 2^s = 2^t - 1 \Rightarrow 2^t - 2^s = 2 \Rightarrow 2^s(2^{t-s} - 1) = 2$ ①, s, t 为正整数, 且 $s \neq t$, 因此 2^s 是 2 的正整数次幂,

当 $s = 1$ 时, $2^s = 2$, 此时 $2^{t-1} - 1 = 1$, 解得 $t = 2$.

验证该解: $a_s, a_{s+1}, b_t, b_{t+1}$ 分别为 $a_1 = 4, a_2 = 7, b_2 = -1, b_3 = -4$, 按从小到大的顺序排列为 $-4, -1, 4, 7$, 相邻项的差不相等, 无法构成等差数列. 其余正整数 s 均无法使方程 ① 成立, 因此不存在符合条件的正整数 s, t .

19. 命题点 ① 数列新定义问题

(1) 【解】由题知 $T_1 = (1, 3, 5, 7), T_2 = (2, 4, 6, 8), T_3 = (1, 3, 5, 7)$, 则 $T_1(A): 2, 3, 3, 4, 7, 3, 2, 9$,

则 $T_2 T_1(A): 2, 4, 3, 5, 7, 4, 2, 10, \dots$ 3 分

故 $\Omega(A) = T_3 T_2 T_1(A): 3, 4, 4, 5, 8, 4, 3, 10, \dots$ 4 分

(2) 【解】由题知每次变换数列 A 的所有项的和增加 4,

又 $2 + 6 + 4 + 2 + 8 + 2 + 4 + 4 = 32$, 故经过了 $\frac{32}{4} = 8$ 次变换.

则 a_1 与 a_2, a_3 与 a_4, a_5 与 a_6, a_7 与 a_8 每组的增量和均为 8, $\dots$ 6 分

式中 $a_3 + 4$ 与 $a_4 + 2, a_5 + 8$ 与 $a_6 + 2$ 增量和不满足, 故不存在符合题意的序列. $\dots$ 8 分

(3) 【证明】设数列 A 经 C 次变换,

$\Omega(A)$ 为 $a_1 + m, a_2 + n, a_3 + p, a_4 + q, a_5 + s, a_6 + t, a_7 + u, a_8 + v$,

则有 $m + n = p + q = s + t = u + v = C$.

必要性证明:

若 $a_1 + m = a_2 + n = a_3 + p = a_4 + q = a_5 + s = a_6 + t = a_7 + u = a_8 + v$,

则 $a_1 + m + a_2 + n = a_3 + p + a_4 + q = a_5 + s + a_6 + t = a_7 + u + a_8 + v$,

又 $m + n = p + q = s + t = u + v$, 所以 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$.

$\dots$ 11 分

充分性证明:

若 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8 = y, y \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 4y$.

因为 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 为偶数, 所以 a_1, a_3, a_5, a_7 有均为奇数, 均为偶数, 两奇两偶三种情形, 且 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ 为偶数.

由 $i + j + k + w$ 为偶数, 可得, $m + p + s + u$ 为偶数, $n + q + t + v$ 为偶数.

故存在 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + m + p + s + u = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + n + q + t + v$ 的情形.

又 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8, m + n = p + q = s + t = u + v$,

所以 $a_1 + m = a_2 + n = a_3 + p = a_4 + q = a_5 + s = a_6 + t = a_7 + u = a_8 + v$,

得证. $\dots$ 15 分



题组 3

1. B 命题点 ⊙ 等差数列求和公式

【解析】 $\because S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = 1, \therefore a_1 + a_9 = \frac{2}{9}$. $\because a_1 + a_9 = a_3 + a_7$, $\therefore a_3 + a_7 = \frac{2}{9}$. 故选 B.

2. B 命题点 ⊙ 等差数列前 n 项和公式

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\because S_5 = 5a_1 + 10d, S_{10} = 10a_1 + 45d, S_5 = S_{10}, \therefore 5a_1 + 10d = 10a_1 + 45d$, 即 $a_1 = -7d$. $\because a_5 = a_1 + 4d = 1, \therefore d = -\frac{1}{3}, \therefore a_1 = -7d = \frac{7}{3}$. 故选 B.

快解 $\because S_5 = S_{10}, \therefore a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 0, \therefore 5a_8 = 0, \therefore a_8 = 0$. $\because a_5 = 1, a_8 = 0, \therefore$ 公差 $d = -\frac{1}{3}$, 则 $a_1 = a_5 - 4d = \frac{7}{3}$. 故选 B.

3. C 命题点 ⊙ 等差数列前 n 项和及基本量的计算, 利用 a_n 与 S_n 的关系求通项公式

【解析】由 $S_n = -n^2 + 8n$, 可得

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1 + 8 = 7$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [-(n-1)^2 + 8(n-1)]$, 整理可得 $a_n = -2n + 9$,

经检验, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 7$ 符合上式.

综上, $a_n = -2n + 9 (n \in \mathbf{N}^*)$, 可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

当 $n \leq 4$ 时, $a_n > 0$;

当 $n \geq 5$ 时, $a_n < 0$,

所以 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和 $T_{12} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12}) = \frac{4 \times (7+1)}{2} - \frac{8 \times (-1-15)}{2} = 16 + 64 = 80$.

故选 C.

4. D 命题点 ⊙ 新定义数列的单调性在实际问题中的应用

【解析】由已知, $b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, \frac{1}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$, 故

$b_1 > b_2$. 同理得 $b_2 < b_3, b_1 > b_3$, 又 $\frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4}}}$, 故 $b_2 < b_4$. 则 $b_1 >$

$b_3 > b_5 > b_7 > \cdots, b_2 < b_4 < b_6 < \cdots$, 且 $b_n < b_{n+1} (n \text{ 为正偶数})$. 由上可知, $b_1 > b_5$, 故 A 错误; $b_3 > b_9 > b_8$, 故 B 错误; $b_6 > b_2$, 故 C 错误; $b_4 < b_6 < b_7$, 故 D 正确. 故选 D.

一题多解

(取特殊值) 取 $\alpha_n = 1$, 于是有 $b_1 = 2, b_2 = \frac{3}{2}, b_3 =$

$\frac{5}{3}, b_4 = \frac{8}{5}, \cdots$, 分子、分母分别构成斐波那契数列, 于是

有 $b_5 = \frac{13}{8}, b_6 = \frac{21}{13}, b_7 = \frac{34}{21}, b_8 = \frac{55}{34}$. 所以 $b_1 > b_5, b_3 = 1 + \frac{2}{3} = 1 +$

$\frac{22}{33} > 1 + \frac{21}{34} = b_8, b_6 = 1 + \frac{8}{13} > 1 + \frac{1}{2} = b_2, b_4 = 1 + \frac{3}{5} < 1 + \frac{13}{21} = b_7$. 对

比选项, 故选 D.



5. C 必刷考点 ① 数列求和

【解析】由题可得, 数列 $\{a_n\}$ 为分段数列, 所以 S_{50} 包括奇数项的和 T_{25} 及偶数项的和 G_{25} .

当 $n=2k-1$ 时, 由 $a_{n+2}=a_n+2$, 得 $a_{n+2}-a_n=2$, 则数列 $\{a_{2k-1}\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 则 $T_{25}=25 \times 1 + \frac{25 \times 24}{2} \times 2 =$

625; 当 $n=2k$ 时, 由 $a_{n+2}=-a_n$, $a_2=1$, 得 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=-1$, 则数列 $\{a_{2k}\}$ 是首项为 1, 公比为 -1 的等比数列, 则 $G_{25} = \frac{1 \times [1 - (-1)^{25}]}{1 - (-1)} = 1$, 则 $S_{50} = T_{25} + G_{25} = 625 + 1 = 626$. 故选 C.

6. D 必刷题型 ① 等比数列的前 n 项积问题

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意, $a_1 \cdot a_5 \cdot a_{12} = a_1 \cdot a_1 q^4 \cdot a_1 q^{11} = (a_1 q^5)^3$ 为确定常数, 即 a_6 为确定常数.

$T_7 = a_1 a_2 \cdots a_6 a_7 = a_4^7$, 不符合题意;

$T_8 = a_1 a_2 \cdots a_7 a_8 = (a_4 a_5)^4$, 不符合题意;

$T_{10} = a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10} = (a_5 a_6)^5$, 不符合题意;

$T_{11} = a_1 a_2 \cdots a_{10} a_{11} = a_6^{11}$ 为确定常数, 符合题意.

故选 D.

7. C 必刷题型 ① 数列的实际应用

【解析】由题意可知, $\frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{2}, \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2^2}, \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{2^n}$,

所以 $\frac{P_n}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdots \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} \times \cdots \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$,

关键点

令 $\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \geq 2^{-2024}$, 即 $\frac{n(n+1)}{2} \leq 2024$, 即 $n(n+1) \leq 4048$. 当

$n=63$ 时, $63 \times 64 = 4032 < 4048$, 满足条件; 当 $n=64$ 时, $64 \times 65 = 4160 > 4048$, 不满足条件, 所以 n 的最大值为 63. 故选 C.

8. A 必刷题型 ① 数列不等式恒成立问题

【解析】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = \frac{S_n}{n} + 2(n-1)$,

则当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = \frac{S_n}{n} + 2(n-1)$, 整理得 $(n-1)S_n - nS_{n-1} =$

$2n(n-1)$, 所以 $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = 2 (n \geq 2)$,

又 $S_1 = a_1 = -5$, 故数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{S_1}{1} = -5$ 为首项, 2 为公差的等差数列.

所以 $\frac{S_n}{n} = -5 + (n-1) \times 2 = 2n-7$, 故 $S_n = n(2n-7)$.

所以 $S_{n+1} - S_n = (n+1)(2n-5) - n(2n-7) = 4n-5$,

当 $n=1$ 时, $S_{n+1} - S_n < 0$, 则 $S_2 < S_1$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n+1} - S_n > 0$, 所以 $S_2 < S_3 < S_4 < \cdots$.

综上, $(S_n)_{\min} = S_2 = 2 \times (-3) = -6$, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \leq S_n$ 恒成立, 则 $\lambda \leq (S_n)_{\min} = -6$, 故实数 λ 的取值范围是 $(-\infty, -6]$.

故选 A.



9.14 必刷考点 ⊙ 等差数列基本量的计算

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $3S_5 = 8S_3$ 得 $15a_3 =$

$24a_2$, 即 $5a_3 = 8a_2$. 由 $\begin{cases} 5a_3 = 8a_2, \\ S_4 = 26, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} 2d = 3a_1, \\ 2a_1 + 3d = 13, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3, \end{cases}$ 所以 $a_5 = a_1 + 4d = 14$.

一题多解

易知 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 设 $\frac{S_3}{3} = x$, 则 $x, \frac{13}{2}, \frac{8}{5}x$ 三项成等差数列, 于是 $13 = \frac{13}{5}x$, 解得 $x = 5$, 则 $\frac{S_5}{5} = 8, S_5 = 40$, 故 $a_5 = S_5 - S_4 = 14$.

10. ①③④ 命题点 ⊙ 数列与集合的综合问题

【解析】对于①, 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列,

设 $a_n = a_1 + (n-1)d_1 = d_1n + (a_1 - d_1), n \in \mathbf{N}^*$,

$b_n = b_1 + (n-1)d_2 = d_2n + (b_1 - d_2), n \in \mathbf{N}^*$,

故可将 a_n 与 b_n 看作是关于 n 的一次函数,

其图象最多只有一个交点, 且交点横坐标不是整数时, 不存在 k 满足 $a_k = b_k$, 故 M 中最多只有 1 个元素, ①正确.

对于②, 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列, 设 $a_n = 2^n, b_n = (-2)^n$, 则当 n 为偶数时, $a_n = b_n$, 所以 M 中有无数个元素, ②错误.

对于③, 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$

为等比数列, 则设 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot$

$d, b_n = b_1 q^{n-1}$. 当 $q > 0 (q \neq 1)$ 时, 由

一次函数和指数函数的性质可知, M 中最多有 2 个元素. 当 $q < 0$

且 $q \neq -1$ 时, 点 (n, b_n) 分奇偶在函数

$y = b_1(-q)^{n-1}$ 和 $y = -b_1 \cdot$

$(-q)^{n-1}$ 的图象上, 如图. 由图可知, M 中可能有 0, 1, 2, 3 个元素,

当 $a_n = 3n - 4, b_n = -(-2)^{n-1}$ 时,

$a_1 = b_1 = -1, a_2 = b_2 = 2, a_4 = b_4 = 8$,

满足 M 中有 3 个元素, ③正确.

对于④, 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 a_k 随 k 的增大而增大, 在平面

直角坐标系中, 散点 (k, a_k) 由左下到右上分布; 若 $\{b_n\}$ 为

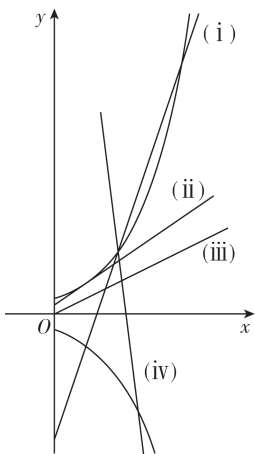
递减数列, 则 b_k 随 k 的增大而减小, 在平面直角坐标系中,

散点 (k, b_k) 由左上到右下分布.

故点 (k, a_k) 与点 (k, b_k) 最多只能重合一次, 即 M 中最多只

有 1 个元素, ④正确.

综上, 正确结论的序号是①③④.



11. 命题点 ⊙ 等比数列的通项公式和根据新定义分类求和

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 由题设得 $a_1q + a_1q^3 = 20, a_1q^2 =$

8 , 解得 $q = \frac{1}{2}$ (舍去), $q = 2$ 3 分

由题设得 $a_1 = 2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ 5 分

(2) 由题设及 (1) 知 $b_1 = 0$, 且当 $2^n \leq m < 2^{n+1}$ 时, $b_m = n$.

..... 7 分



所以 $S_{100} = b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6 + b_7) + \cdots + (b_{32} + b_{33} + \cdots + b_{63}) + (b_{64} + b_{65} + \cdots + b_{100}) = 0 + 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + 5 \times 2^5 + 6 \times (100 - 63) = 480$ 12 分

易错警示 求解 b_m 的易错之处在于没有理解区间端点 m 与 a_n 的关系, 其实只需发现 2^n 出现在区间右端点处的规律, 即可得到 2^n 的个数为 b_m 的值, 在 100 以内, m 为正整数, b_m 为 2^0 个 0, 2^1 个 1, 2^2 个 2, 2^3 个 3, 2^4 个 4, 2^5 个 5, $100 - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 37$ 个 6.

12. 命题点 ⊙ 等差数列的通项公式, 与前 n 项和有关的不等式的求解

【解】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$),

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + 2d = 5a_1 + 10d, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 4a_1 + 6d, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 2, \end{cases} \text{..... 4 分}$$

$$\text{则 } a_n = -4 + (n-1) \times 2 = 2n - 6. \text{ 5 分}$$

$$(2) \text{ 结合 (1) 可知, } S_n = -4n + \frac{n(n-1) \times 2}{2} = n^2 - 5n,$$

$$\text{则 } S_n > a_n \text{ 等价于 } n^2 - 5n > 2n - 6, \text{ 7 分}$$

解得 $n < 1$ 或 $n > 6$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \geq 7$,

故使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值为 7. 10 分

一题多解

$$(1) \text{ 由 } a_3 = S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3, \text{ 解得 } a_3 = 0, \text{ 则}$$

$$S_4 = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} = 2(a_2 + a_3) = 2a_2, \text{ 因此 } a_2 a_4 = 2a_2. \text{ 因为数列 } \{a_n\} \text{ 的公差 } \neq 0, \text{ 所以 } a_2 \neq 0, \text{ 则 } a_4 = 2, \text{ 3 分}$$

$$\text{因此数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } a_4 - a_3 = 2, \text{ 从而 } a_n = 0 + (n-3) \times 2 = 2n - 6. \text{ 5 分}$$

(2) 因为 $S_1 = a_1$, 所以由 $S_n > a_n$ 得 $n \geq 2$, 且 $S_n - a_n > 0$, 即

$$S_{n-1} > 0, \text{ 则 } S_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} > 0, \text{ 则 } a_1 + a_{n-1} = -4 + 2(n-1) - 6 > 0, \text{ 解得 } n > 6. \text{ 8 分}$$

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以使得 $S_n > a_n$ 的 n 的最小值为 7. 10 分

13. 命题点 ⊙ 根据 S_n 与 a_n 的递推关系证明等差数列及求数列前 n 项和的最小值

$$(1) \text{ 【证明】依题意, 因为 } \frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1, \text{ 所以 } 2S_n = 2na_n + n - n^2, \text{ ①}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} = 2(n-1)a_{n-1} + n - 1 - (n-1)^2. \text{ ②}$$

$$\text{由 ① - ② 可得, } 2a_n = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} - 2n + 2, \text{ 4 分}$$

所以 $a_n - a_{n-1} = 1, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

..... 6 分

(2) **【解】** 由 (1) 可知, 数列 $\{a_n\}$ 的公差为 1.

因为 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 所以 $a_7^2 = a_4 a_9$, 即 $(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3) \cdot (a_1 + 8)$, 解得 $a_1 = -12$, 所以 $a_n = -12 + (n-1) \times 1 = n - 13$.

..... 8 分

又当 $a_n \leq 0$ 时, $n \leq 13$ (易错: 注意 a_n 等于 0 时的情况),



所以当 $n=12$ 或 $n=13$ 时, S_n 取得最小值,

即最小值为 $S_{12}=S_{13}=-78$ 12 分

一题多解 (2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 则 $a_7^2 = a_4 a_9$, 所以
 $(a_1+6)^2 = (a_1+3)(a_1+8)$, 解得 $a_1 = -12$ 8 分

$$\text{所以 } a_n = n-13, \text{ 所以 } S_n = \frac{n(-12+n-13)}{2} = \frac{1}{2} \left(n - \frac{25}{2} \right)^2 - \frac{625}{8}.$$

..... 10 分

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n=12$ 或 $n=13$ 时, S_n 最小, 则 S_n 的最小值为 $S_{12}=S_{13}=-78$ 12 分

14. 命题点 ①累乘法求通项、裂项相消法求和

(1) 【解】由题知, 数列 $\left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数

列, 所以 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}$,

所以 $S_n = \frac{n+2}{3} a_n$ 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{n+1}{3} a_{n-1}$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{3} a_n - \frac{n+1}{3} a_{n-1}$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$,

所以 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{1} \cdot$

$1 = \frac{n(n+1)}{2}$ 4 分

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 满足上式 (提示: 不要忽略验证 $n=1$ 是否

满足), 所以 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 5 分

一题多解

(1) 由上知 $\frac{a_n}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n-1} (n \geq 2)$,

所以 $\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)n} (n \geq 2)$, 2 分

所以 $\left\{ \frac{a_n}{n(n+1)} \right\}$ 为常数列, 又 $\frac{a_1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ 5 分

(2) 【证明】由(1)知, $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, 7 分

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$

$2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2 - \frac{2}{n+1} < 2$ 10 分

15. 必刷考点 ①等差数列的性质及数列求和

【解】(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 均为等差数列, $\therefore S_{2n-1} =$

$$\frac{(2n-1)(a_1 + a_{2n-1})}{2} = (2n-1)a_n, T_{2n-1} = \frac{(2n-1)(b_1 + b_{2n-1})}{2} =$$

$$(2n-1)b_n. \text{ 又 } \frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{n+1}, \therefore \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{2(2n-1)}{2n-1+1} = \frac{2n-1}{n} \text{ (提示: 等差数列的性质).}$$



设 $a_n = k(2n-1)$, $k \neq 0$, 则 $b_n = kn$, $a_1 = k = 1$,

$$\therefore a_n = 2n-1, b_n = n.$$

综上, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 由 (1) 可得, $a_n = 2n-1$, $b_n = n$,

$$\therefore c_n = (-2)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} \right) = (-2)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} - (-2)^n \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

$$\therefore P_n = 1 - (-2)^1 \times \frac{1}{3} + (-2)^1 \times \frac{1}{3} - (-2)^2 \times \frac{1}{5} + \cdots + (-2)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} - (-2)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - (-2)^n \cdot \frac{1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

关键点拨 本题第 (2) 问的解题关键是对数列 $\{c_n\}$ 的通项公式合理变形, 即 $(-2)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} \right) = (-2)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} - (-2)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$.

16. 命题点 ① 等差数列的通项公式及前 n 项和公式、分组求和

(1) 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\text{因为 } b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数,} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \text{ 所以 } b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d,$$

$$b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } S_4 = 32, T_3 = 16,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ (a_1 - 6) + (2a_1 + 2d) + (a_1 + 2d - 6) = 16, \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{整理得 } \begin{cases} 2a_1 + 3d = 16, \\ a_1 + d = 7, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2n + 3. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 【证明】由 (1) 知 } a_n = 2n + 3, \text{ 所以 } S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} =$$

$$n^2 + 4n, b_n = \begin{cases} 2n - 3, & n \text{ 为奇数,} \\ 4n + 6, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 7) + (4n + 2) + 2n - 3$$

$$= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 7) + (2n - 3)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 2)]$$

$$= \frac{\frac{n+1}{2}(-1 + 2n - 3)}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}(14 + 4n + 2)}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 5n - 10}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3n^2 + 5n - 10}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2 - 3n - 10}{2} =$$

$$\frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0,$$

$$\text{所以 } T_n > S_n. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 5) + (4n + 6)$$

$$= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 5)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 6)]$$



$$= \frac{\frac{n}{2}(-1+2n-5)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(14+4n+6)}{2}$$

$$= \frac{3n^2+7n}{2}.$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3n^2+7n}{2} - (n^2+4n) = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$ 11 分

综上可知, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$ 12 分

一题多解 (2) 由 (1) 知 $a_n = 2n+3$.

$$\text{所以 } S_n = \frac{n[5+(2n+3)]}{2} = n^2+4n, \text{ 6 分}$$

$$b_n = \begin{cases} 2n-3, & n \text{ 为奇数,} \\ 4n+6, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} b_{2n-1}+b_{2n} = 12n+1. \text{ 7 分}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = 12 \times 1 + 1 + 12 \times 2 + 1 + \cdots + 12 \times \frac{n}{2} + 1$$

$$= 12 \times \frac{\left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{n}{2}}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n.$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - (n^2+4n) = \frac{n(n-1)}{2} > 0. \text{ 9 分}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{7}{2}(n+1) - 4n -$$

$$10 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5.$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 - (n^2+4n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n -$$

$$5 = \frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0. \text{ 11 分}$$

综上可知, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$ 12 分

17. 必刷题型 ⊙ 等差数列的定义、通项公式, 累乘法求通项以及数列与集合的综合问题

$$(1) \text{【证明】设等差数列 } \left\{ \frac{S_n}{n} \right\} \text{ 的公差为 } d, \text{ 则 } \frac{S_4}{4} = \frac{S_1}{1} + 3d.$$

$$\because S_4 = 20, \therefore S_1 + 3d = 5. \text{ ①}$$

$$\because a_2 = 4, \therefore S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + 4. \therefore \frac{S_2}{2} = \frac{S_1}{1} + d, \therefore S_1 + 2d = 4. \text{ ②}$$

$$\text{联立①②解得 } S_1 = 2, d = 1, \therefore \frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d = 2 + n - 1 = n +$$

$$1, \therefore S_n = n(n+1).$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n = 2n,$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$, 上式也成立 (易错: 注意检验 $n = 1$ 时是否符合通项公式),

$$\therefore a_n = 2n (n \in \mathbf{N}^*).$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列.

$$(2) \text{【解】由 (1) 可知 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{2n}{2n+4} = \frac{n}{n+2},$$



$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 6 = \frac{12}{n(n+1)},$$

$$\therefore b_1 = 6 \text{ 符合上式, } \therefore b_n = \frac{12}{n(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\therefore b_n = \frac{12}{n(n+1)} = 12 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = 12 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 12 \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 12 - \frac{12}{n+1}. \therefore n \in \mathbf{N}^*, \therefore \text{当 } T_n \in \mathbf{N}^*, \text{ 即 } \frac{12}{n+1} \in \mathbf{N}^* \text{ 时,}$$

$$n = 1, 2, 3, 5, 11, \text{ 对应的 } T_n = 6, 8, 9, 10, 11, \therefore M = \{6, 8, 9, 10, 11\}.$$

18. 必刷考点 ⊙ 等差数列和等比数列基本量的运算、分组求和

【解】(1) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$,

依题意可得 $a_1 = 1, b_1 = 2$,

$$\begin{cases} 2q = 1 + 1 + 2d, \\ 2 \times 2q^2 = 5(1 + 2d) + 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} d = 1, \\ q = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} d = -\frac{1}{2}, \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (舍去).}$$

$$\therefore a_n = n, b_n = 2^n.$$

(2) 在新数列的 b_{n+1} 之前的所有项中, 含有 $\{a_n\}$ 中的项共有

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \text{ (项)},$$

$$\therefore T_n = \frac{(1 + 2^n - 1)(2^n - 1)}{2} + \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 2,$$

$$\therefore d_n = \frac{n^2}{n+1} \left(\frac{1}{2^n + 3} + 2 \right) = \frac{n^2}{(n+1)(2^n + 3)} + \frac{2n^2}{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)(2^n + 3)} +$$

$$\frac{2}{n+1} + 2(n-1) = \frac{n^2 + 2(2^n + 3)}{(n+1)(2^n + 3)} + 2(n-1).$$

$$\therefore (n+1)(2^n + 3) - n^2 - 2(2^n + 3) = (n-1)2^n - n^2 + 3n - 3,$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2^n \geq n+2,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } (n-1)2^n - n^2 + 3n - 3 \geq (n-1)(n+2) - n^2 + 3n - 3 = 4n - 5 > 0,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 0 < \frac{n^2 + 2(2^n + 3)}{(n+1)(2^n + 3)} < 1, \text{ 故 } [d_n] = 2(n-1);$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } d_1 = \frac{11}{10}, \therefore [d_1] = 1.$$

$$\therefore [d_1] + [d_2] + [d_3] + \dots + [d_n] = 1 + 2[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = n^2 - n + 1 \leq 2\,023,$$

$$\therefore n^2 - n = n(n-1) \leq 2\,022, \text{ 故满足不等式的最大正整数 } n = 45.$$